ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 23 Μαΐου 2013
7:30 – 10:30

Λ Υ Σ Ε Ι Σ

ΜΕΡΟΣ Α΄: **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)$ της συνάρτησης:

$\psi = \chi^3 - 2\chi + \eta\mu\chi$

Λύση: $\frac{d\psi}{d\chi} = 3\chi^2 - 2 + \sigma\upsilon\nu\chi$

2. Οι ψηλότερες θερμοκρασίες που καταγράφηκαν, τις 8 πρώτες μέρες του Ιανουαρίου στην Αθήνα, ήταν: 11, 12, 15, 16, 13, 12, 12, 13.
Να βρείτε τη μέση τιμή των θερμοκρασιών αυτών.

Λύση:
$$\bar{\chi} = \frac{11+12+15+16+13+12+12+13}{8} = \frac{104}{8} = 13$$

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(0,-3)$ και ακτίνα $R = 2$.

Λύση: $(\chi-\alpha)^2 + (\chi-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow \chi^2 + (\psi+3)^2 = 4$

4. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Ι και τελειώνουν σε Ο;

Λύση:

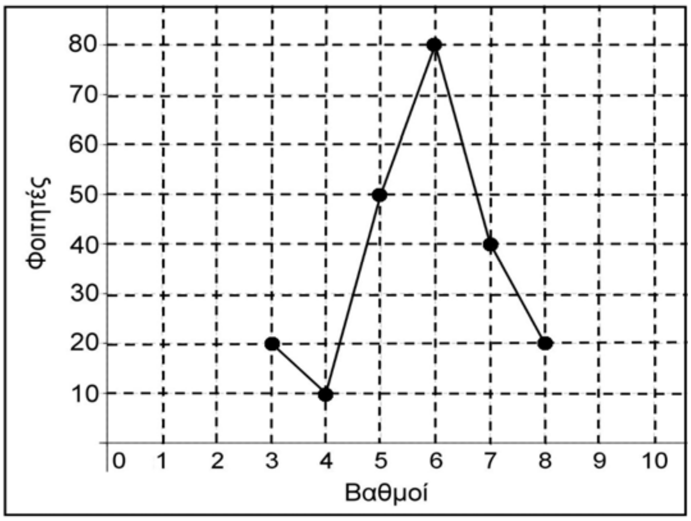
$OOO\,II\,KNMA \Rightarrow 3O,\ 2I \Rightarrow$

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = \frac{362880}{6\cdot 2} = 30240 \text{ αναγραμματισμοί}$$

$I\ \underline{O}\,\underline{O}\,\underline{I}\,\underline{K}\,\underline{N}\,\underline{M}\,\underline{A}\ O \Rightarrow 2$ ίδια

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{7!}{2!} = \frac{5040}{2} = 2520 \text{ αναγραμματισμοί.}$$

5. Στο πιο κάτω πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμοί που πήραν οι φοιτητές ενός τμήματος του Πανεπιστημίου Κύπρου, στην εξέταση του μαθήματος της Στατιστικής.



Με βάση το πιο πάνω πολύγωνο συχνοτήτων:

a) **Να βρείτε πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό 8.**

b) **Να βρείτε συνολικά πόσοι φοιτητές παρακάθισαν στην εξέταση.**

c) **Αν ένας φοιτητής για να περάσει το μάθημα πρέπει να πάρει στην εξέταση βαθμό τουλάχιστον 5, να βρείτε πόσοι φοιτητές πέρασαν το μάθημα.**

Λύση:

a) **20 φοιτητές πήραν βαθμό 8.**

b) $\mathbf{20+10+50+80+40+20=220}$ **φοιτητές.**

c) $\mathbf{50+80+40+20=190}$ **φοιτητές πέρασαν το μάθημα.**

6. **Να βρείτε το όριο:** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi^2}$

Λύση: $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{2\chi}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{2}=\dfrac{1}{2}$

7. **Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:** $\int_1^2\left(4\chi^3-3\chi\right)d\chi$

Λύση:

$$\int_1^2\left(4\chi^3-3\chi\right)d\chi=\left[\chi^4-3\frac{\chi^2}{2}\right]_1^2=\left[2^4-3\frac{2^2}{2}\right]-\left[1^4-3\frac{1^2}{2}\right]=$$

$$=\left(16-6\right)-\left(1-\frac{3}{2}\right)=16-6-1+\frac{3}{2}=9+\frac{3}{2}=\frac{21}{2}$$

8. **Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:** $\psi=\eta\mu^2\chi$

Να δείξετε ότι: $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}+4\psi-2=0$

Λύση:

$$\frac{d\psi}{d\chi}=2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=2\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-2\eta\mu\chi\cdot\eta\mu\chi=2\sigma\upsilon\nu^2\chi-2\eta\mu^2\chi=$$

$$=2-2\eta\mu^2\chi-2\eta\mu^2\chi=2-4\eta\mu^2\chi=2-4\psi$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+4\psi-2=0$$

9. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ιδίου δειγματικού χώρου ισχύουν: $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$.

   a) Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A')$, $P(A\cap B)$ και $P(A-B)$.

   b) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

   Λύση:

   a) $P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

   $$P(A\cap B)=P(A)+P(B)--P(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=\frac{6+5-9}{15}=\frac{2}{15}$$

   $$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

   b) $P(A)P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}=P(A\cap B)\Rightarrow$ Α, Β ανεξάρτητα.

10. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση: $\psi^2-\chi\psi=2$

   a) Να δείξετε ότι: $\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\psi}{2\psi-\chi}$

   b) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(1,2)$ είναι: $2\chi-3\psi+4=0$

   Λύση:

   a) $2\psi\frac{d\psi}{d\chi}-\psi-\chi\frac{d\psi}{d\chi}=0\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}(2\psi-\chi)=\psi\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\psi}{2\psi-\chi}$

   b) $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_A=\left.\frac{\psi}{2\psi-\chi}\right|_A=\frac{2}{2\cdot 2-1}=\frac{2}{3}$

   $\psi-\psi_A=\lambda_{\varepsilon\varphi}(\chi-\chi_A)\Rightarrow\psi-2=\frac{2}{3}(\chi-1)\Rightarrow$

   $3\psi-6=2\chi-2\Rightarrow 3\psi-2\chi=4\Rightarrow 2\chi-3\psi+4=0$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $\psi = \dfrac{\chi^2}{\chi - 1}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις ασύμπτωτες, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης, και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

- **Π.Ο.** $= \mathbf{R} - \{1\}$

- **Σ.Τ.** $\psi = 0 \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow (0, 0)$

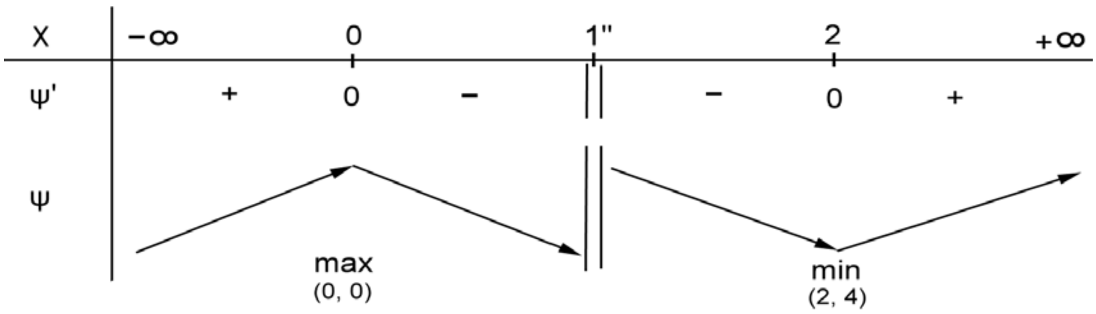
- **Μ. & Α.**

$$\psi = \frac{\chi^2}{\chi - 1} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2\chi(\chi-1) - \chi^2 \cdot 1}{(\chi-1)^2} = \frac{2\chi^2 - 2\chi - \chi^2}{(\chi-1)^2} =$$

$$= \frac{\chi^2 - 2\chi}{(\chi-1)^2} = \frac{\chi(\chi-2)}{(\chi-1)^2}$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow \chi(\chi-2) = 0 \Rightarrow \chi = 0 \text{ ή } \chi = 2$$

Ρίζα του παρονομαστή $\chi = 1''$



$$\chi = 0 \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ max}$$

$$\chi = 2 \Rightarrow \psi = \frac{2^2}{2-1} = 4 \Rightarrow (2, 4) \text{ min}$$

- **Ασύμπτωτες:**

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\chi\to 1^-}\frac{\chi^2}{\chi-1}=\frac{1}{1^- -1}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim_{\chi\to 1^+}\frac{\chi^2}{\chi-1}=\frac{1}{1^+ -1}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \chi=1 \text{ Κ.Α.}$$

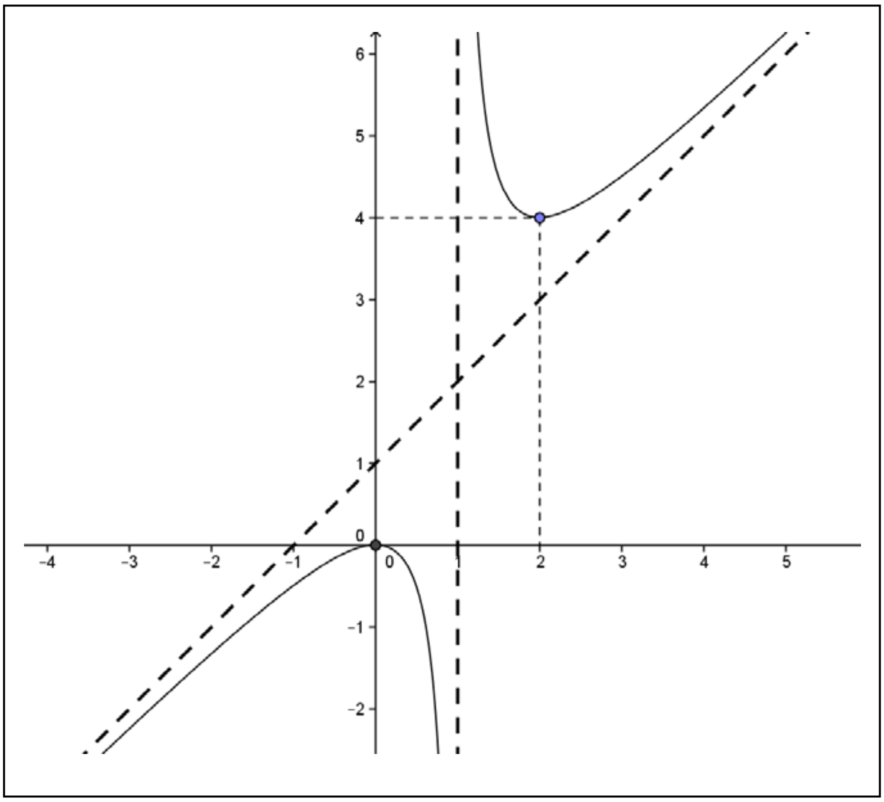
Ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά 1 μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή $\Rightarrow\ \exists$ **Πλ.Α.**

$$\begin{array}{l|l} \chi^2 & \chi-1 \\ \cline{2-2} & \chi+1 \\ \underline{-\chi^2+\chi} & \\ \quad +\chi & \\ \quad \underline{-\chi+1} & \\ \qquad +1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ **η Πλ.Α. είναι** $\psi=\chi+1$

χ	0	3
ψ	1	4

- **Γραφική Παρασταση:**



2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1-\chi$ ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \chi(1-\chi)^3 d\chi$

Λύση:

$u = 1-\chi$

$\chi = 1-u$

$d\chi = -du$

$$\int \chi(1-\chi)^3 d\chi = \int (1-u)u^3(-du) = \int (u^4-u^3)du =$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + c = \frac{(1-\chi)^5}{5} - \frac{(1-\chi)^4}{4} + c$$

3. Ο πίνακας παρουσιάζει τις ώρες ενασχόλησης, με αθλητικές δραστηριότητες, 40 μαθητών ενός σχολείου, κατά το Σαββατοκυρίακο.

Αριθμός ωρών (χ_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών (f_i)	5	11	10	9	3	2

Να βρείτε:

a) την επικρατούσα τιμή (χ_ε),

b) τη μέση τιμή $(\overline{\chi})$, και

c) την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

Λύση:

a) $\chi_\varepsilon = 1$

b)

χ_i	f_i	$\chi_i \cdot f_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2$
0	5	0	-2	4	20
1	11	11	-1	1	11
2	10	20	0	0	0
3	9	27	1	1	9
4	3	12	2	4	12
5	2	10	3	9	18
	40	80			70

$$\overline{\chi} = \frac{80}{40} = 2$$

c) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (\chi_i - \overline{\chi})^2}{v}} = \sqrt{\dfrac{70}{40}} \approx 1,32$

4. **Η συνάρτηση με τύπο: $\psi = \alpha\chi^3 - 3\chi^2 + \beta$ έχει σημείο καμπής στο $A(1, 3)$.**

a) **Να υπολογίσετε τις τιμές των σταθερών α και β.**

b) **Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.**

Λύση:

a) $A(1, 3)$ **σημείο της**

$$\psi = \alpha\chi^3 - 3\chi^2 + \beta \Rightarrow 3 = \alpha \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + \beta \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 6}$$

$$\psi = \alpha\chi^3 - 3\chi^2 + \beta \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 3\alpha\chi^2 - 6\chi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 6\alpha\chi - 6$$

$A(1, 3)$ **σημείο καμπής**

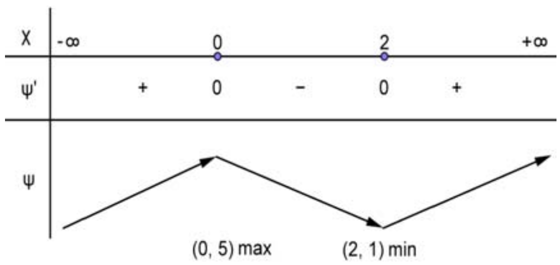
$$\Rightarrow \left.\frac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_A = 0 \Rightarrow 6\alpha \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\alpha + \beta = 6 \Rightarrow 1 + \beta = 6 \Rightarrow \boxed{\beta = 5}$$

b) $\psi = \alpha\chi^3 - 3\chi^2 + \beta \Rightarrow \psi = \chi^3 - 3\chi^2 + 5$ **και** $\dfrac{d\psi}{d\chi} = 3\chi^2 - 6\chi$

Στα ακρότατα $\dfrac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow 3\chi^2 - 6\chi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\chi(\chi - 2) = 0 \Rightarrow \chi = 0 \text{ ή } \chi = 2$$



$$\chi = 0 \Rightarrow \psi = 5 \Rightarrow (0, 5) \text{ max}$$

$$\chi = 2 \Rightarrow \psi = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 12 + 5 = 1 \Rightarrow (2, 1) \text{ min}$$

5. **Από κατάλογο 7 ανδρών και 4 γυναικών σχηματίζεται τυχαία μια πενταμελής επιτροπή.**

   a) **Να βρείτε πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.**

   b) **Αν επιλεγεί τυχαία μια επιτροπή από αυτές, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:**

   Α: «η επιτροπή αποτελείται μόνο από άνδρες».

   Β: «η επιτροπή αποτελείται από 3 άνδρες και 2 γυναίκες».

   Γ: «η επιτροπή περιλαμβάνει το πολύ 2 γυναίκες».

Λύση:

a) $N(\Omega)=\binom{11}{5}=462$ **διαφορετικές επιτροπές**

b) $N(A)=\binom{7}{5}=21 \Rightarrow P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{21}{462}=\dfrac{1}{22}$

$$N(B)=\binom{7}{3}\binom{4}{2}=35\cdot 6=210 \Rightarrow P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{210}{462}=\frac{5}{11}$$

$$N(\Gamma)=\binom{7}{5}\binom{4}{0}+\binom{7}{4}\binom{4}{1}+\binom{7}{3}\binom{4}{2}=21+35\cdot 4+35\cdot 6=371\Rightarrow$$

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{371}{462}=\frac{53}{66}$$

-------- Τ Ε Λ Ο Σ --------