

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011**

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (Ι) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ** : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ** : ΤΡΙΤΗ, 24 ΜΑΪΟΥ 2011

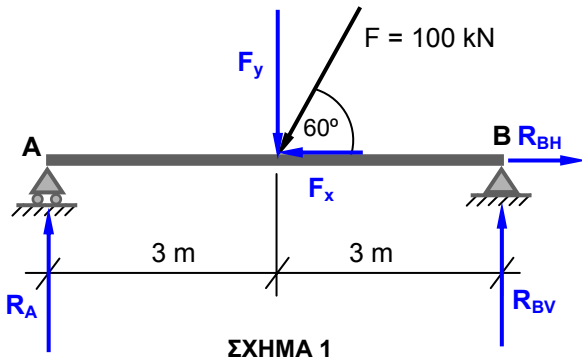
**ΩΡΑ** : 11:00 – 13:30

**ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

**ΜΕΡΟΣ Α' (48 μονάδες)**

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 4 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις της δοκού του σχήματος 1.



ΣΧΗΜΑ 1

$$F_x = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ kN}$$

$$F_y = 100 \cdot \eta\mu 60^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{BH} = F_x = \underline{50 \text{ kN}}$$

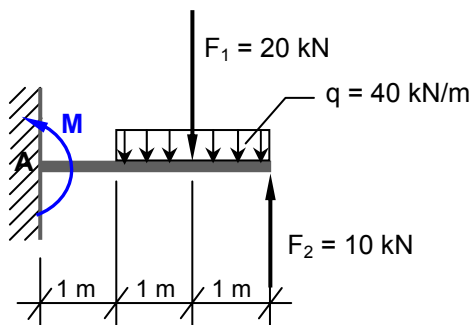
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_{BV} - F_y = 0$$

$$R_A + R_{BV} - 86,6 = 0$$

$$R_A = R_{BV} = \underline{43,3 \text{ kN}}$$

2. Να υπολογίσετε το μέγεθος της ροπής κάμψης  $M_A$  που αναπτύσσεται στη στήριξη του προβόλου του σχήματος 2.



ΣΧΗΜΑ 2

$$\Sigma M = 0$$

$$-M + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 0$$

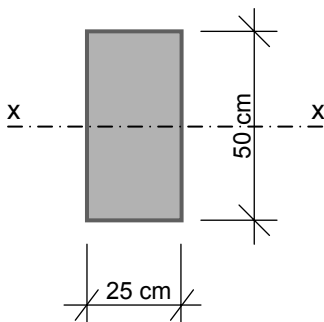
$$-M + 40 + 160 - 30 = 0$$

$$+M = +170 \text{ kNm}$$

Ροπή κάμψης:

$$M_A = -M = \underline{-170 \text{ kNm}}$$

3. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης  $W_x$  και την ακτίνα αδράνειας  $i_x$ , της δοκού με ορθογωνική διατομή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

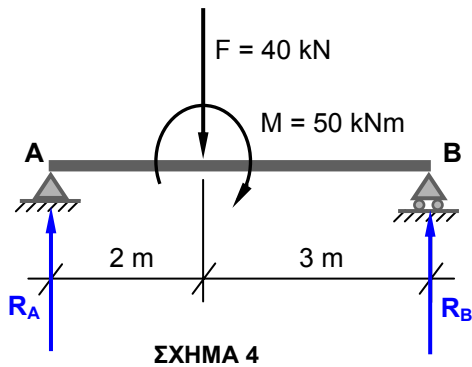


ΣΧΗΜΑ 3

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{25 \cdot 50^2}{6} = \underline{10416,6 \text{ cm}^3}$$

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{12}} = \underline{14,43 \text{ cm}}$$

4. Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στις στηρίξεις της δοκού του σχήματος 4.



$$\Sigma M_A = 0$$

$$40 \cdot 2 + 50 - R_B \cdot 5 = 0$$

$$5R_B = 130 \rightarrow R_B = \underline{26 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 5 + 50 - 40 \cdot 3 = 0$$

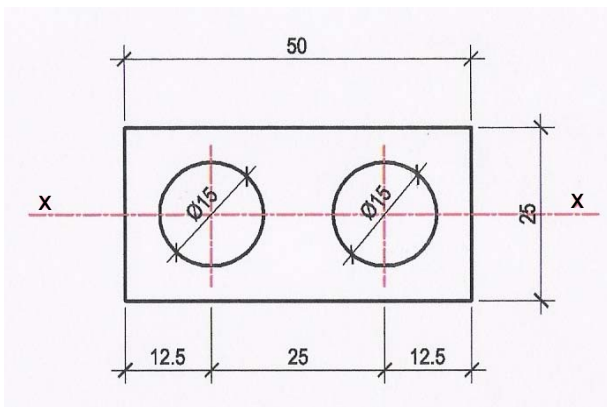
$$5R_A = 70 \rightarrow R_A = \underline{14 \text{ kN}}$$

$$\text{Έλεγχος: } \Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - 40 = 0$$

$$14 + 26 - 40 = 0$$

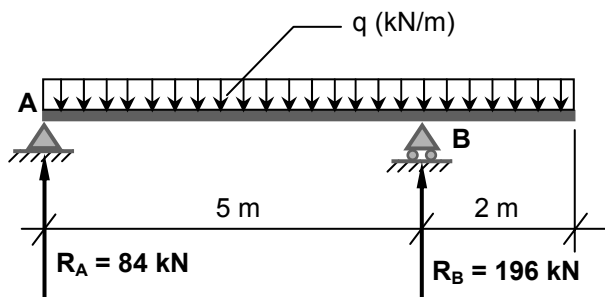
5. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας  $I_{x-x}$  της διατομής με τις δύο οπές όπως φαίνεται στο σχήμα 5. Οι διαστάσεις στη διατομή είναι σε cm.



$$I_{x-x} = \frac{50 \cdot 25^3}{12} - 2 \frac{3.14 \cdot 15^4}{64}$$

$$I_{x-x} = 65104,167 - 4967,578 = \underline{60136,589 \text{ cm}^4}$$

6. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q$  (kN/m), που καταπονεί την προέχουσα δοκό του σχήματος 6.



$$\Sigma F_y = 0$$

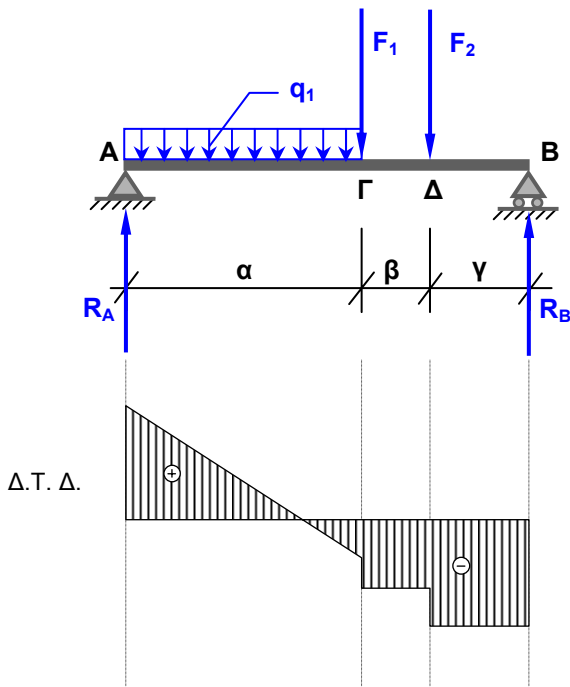
$$R_A + R_B - q \cdot 7 = 0$$

$$84 + 196 - q \cdot 7 = 0$$

$$280 = 7q$$

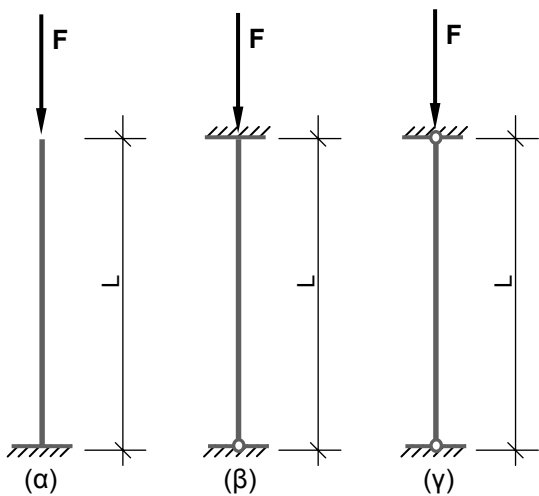
$$q = \underline{40 \text{ kN/m}}$$

7. Στο σχήμα 7 δίνονται η αμφιέριστη δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο **Δ.Τ.Δ.**



ΣΧΗΜΑ 7

8. Να αναφέρετε και να εξηγήσετε ποια από τις τρεις ράβδους του σχήματος 8, που έχουν την ίδια διατομή, θα λυγίσει πρώτη, όταν και οι τρεις φορτιστούν με το ίδιο αξονικό φορτίο που αυξάνεται σταδιακά.



ΣΧΗΜΑ 8

*Ελεύθερο μήκος λογισμού*

$$\ell_\alpha = 2 \cdot L$$

$$\ell_\beta = 0,7 \cdot L$$

$$\ell_\gamma = L$$

*Κρίσιμο φορτίο λογισμού*

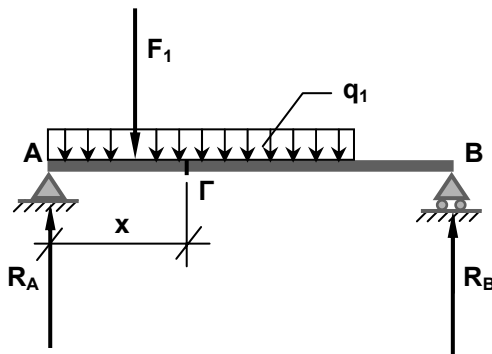
$$F_{κρ} = \frac{\pi^2 E I_{ελ}}{\ell^2}$$

Θα λυγίσει πρώτα η ράβδος (α) διότι έχει το μεγαλύτερο μήκος λογισμού.

9. Σε δοκό η οποία καταπονείται σε κάμψη, αναπτύσσεται μέγιστη ροπή  $M_{max} = 80 \text{ kNm}$ . Αν η ροπή αντίστασης της δοκού είναι  $W = 200 \text{ cm}^3$ , να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση κάμψης που αναπτύσσεται στη διατομή της.

$$\sigma_{μεγ} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{80 \text{ kNm}}{200 \text{ cm}^3} = \frac{80 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm}}{200 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = \underline{400 \text{ N/mm}^2}$$

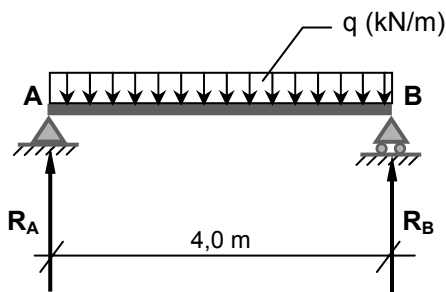
10. Στη δοκό του σχήματος 9 η τέμνουσα δύναμη έχει μηδενική τιμή στο σημείο Γ. Να γράψετε την εξίσωση για τον υπολογισμό της τέμνουσας δύναμης  $Q_{\Gamma}$  σε απόσταση  $x$  από το σημείο Α.



$$Q_{\Gamma} = R_A - F_1 - q_1 \cdot x = 0$$

ΣΧΗΜΑ 9

11. Η μέγιστη ροπή κάμψης που αναπτύσσεται στη δοκό του σχήματος 10, είναι  $M_{max} = 50 \text{ kNm}$ . Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q$  (kN/m), που καταπονεί τη δοκό.



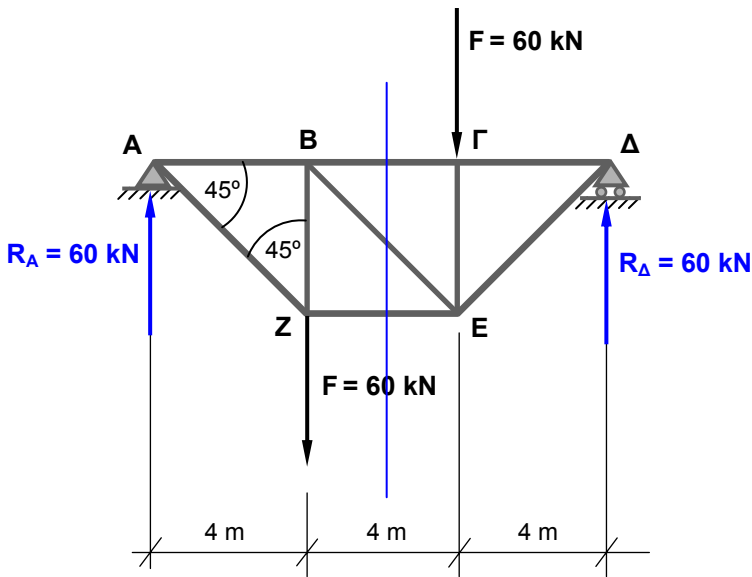
$$M_{max} = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

$$50 = \frac{q \cdot 4^2}{8}$$

$$400 = 16q \rightarrow \underline{q = 25 \text{ kN/m}}$$

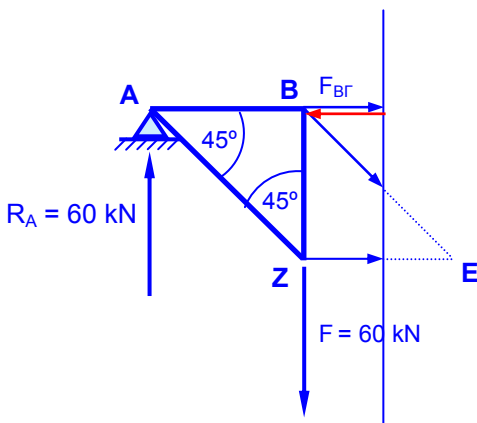
ΣΧΗΜΑ 10

12. Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στη ράβδο ΒΓ του δικτυώματος του σχήματος 11, με τη μέθοδο των τομών.



ΣΧΗΜΑ 11

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \\ R_A + R_{\Delta} - 60 - 60 &= 0 \\ R_A = R_{\Delta} &= 60 \text{ kN}\end{aligned}$$

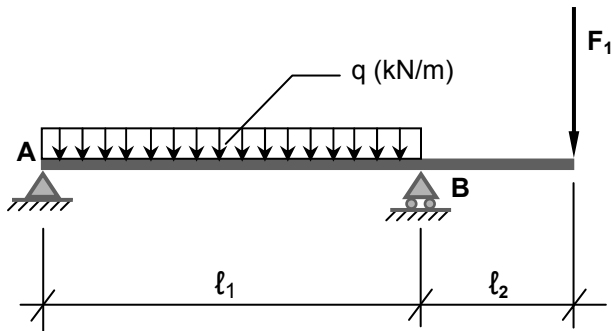


$$\begin{aligned}\Sigma M_E &= 0 \\ R_A \cdot 8 - 60 \cdot 4 + F_{B\Gamma} \cdot 4 &= 0 \\ 60 \cdot 8 - 60 \cdot 4 + 4F_{B\Gamma} &= 0 \\ F_{B\Gamma} &= -60 \text{ kN} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{θλιβόμενη ράβδος}\end{aligned}$$

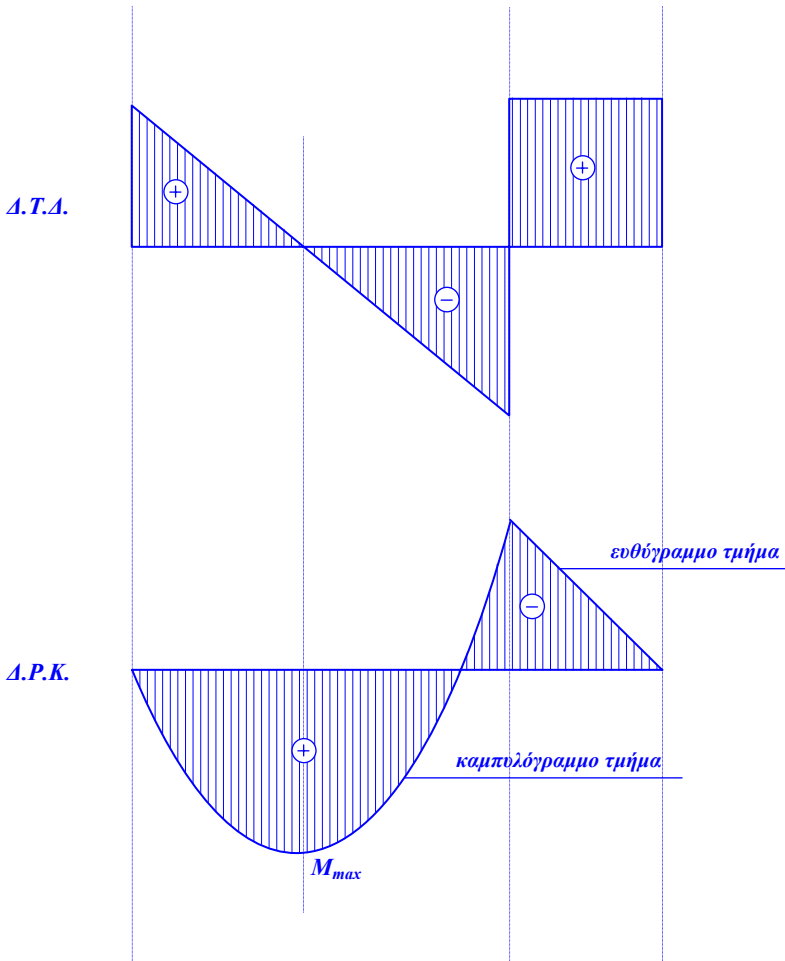
**ΜΕΡΟΣ Β´ (32 μονάδες)**

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 8 μονάδες.

13. Να σχεδιάσετε τη μορφή των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και των ροπών κάμψης **M**, της δοκού του σχήματος 12, χωρίς να τη λύσετε. Να δείξετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματα των διαγραμμάτων, καθώς και τη θέση της μέγιστης ροπής κάμψης **M<sub>max</sub>**.



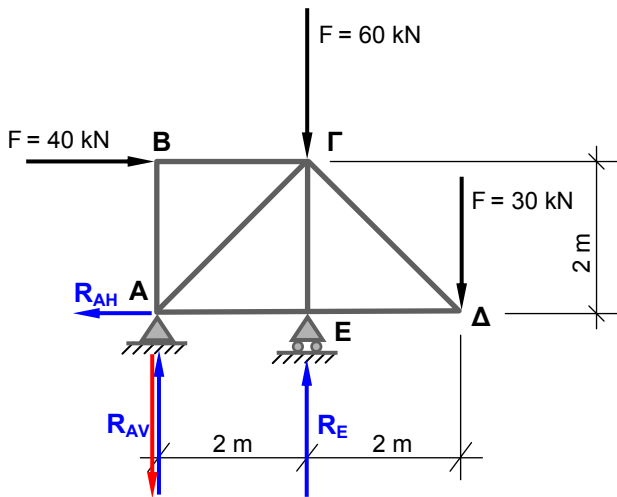
ΣΧΗΜΑ 12



14. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο σχήμα 13.

(α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.

(β) Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **BA**, **BΓ**, **ΔΓ** και **ΔE**.



ΣΧΗΜΑ 13

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{AH} = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$40 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 30 \cdot 4 - R_E \cdot 2 = 0$$

$$R_E = 160 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_E = 0$$

$$R_{AV} \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 0$$

$$R_{AV} = -70 \text{ kN}$$

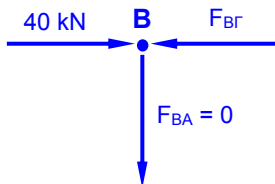
Έλεγχος:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{AV} + R_E - 60 - 30 = 0$$

$$-70 + 160 - 60 - 30 = 0$$

**Κόμβος B**

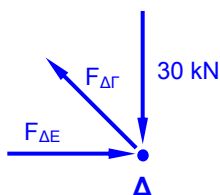


**Κόμβος B**

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{BG} = \underline{40 \text{ kN}} \quad \text{θλιβόμενη}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{BA} = \underline{0}$$

**Κόμβος Δ**



**Κόμβος Δ**

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{\Delta\Gamma} \cdot \eta\mu 45^\circ - 30 = 0$$

$$F_{\Delta\Gamma} = \underline{42,43 \text{ kN}} \quad \text{εφελκυστική}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{\Delta E} - F_{\Delta\Gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0$$

$$F_{\Delta E} = \underline{30 \text{ kN}} \quad \text{θλιβόμενη}$$



15. Μεταλλική ράβδος με τετραγωνική διατομή **8 x 8 cm** και μήκος **4 m** στηρίζεται στο ένα άκρο με πάκτωση και στο άλλο με άρθρωση. Να υπολογίσετε το επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού, όταν η ράβδος καταπονείται σε κεντρική θλίψη.

Δίνονται: Μέτρο ελαστικότητας **E = 210 · 10<sup>3</sup> N/mm<sup>2</sup>**  
Συντελεστής ασφάλειας **γ = 2,5**

*Ελεύθερο μήκος λυγισμού*  $\ell = 0,7 \cdot 4,0 = 2,8 \text{ m} = 2800 \text{ mm}$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{80 \cdot 80^3}{12} = 341,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

*Κρίσιμο φορτίο λυγισμού*

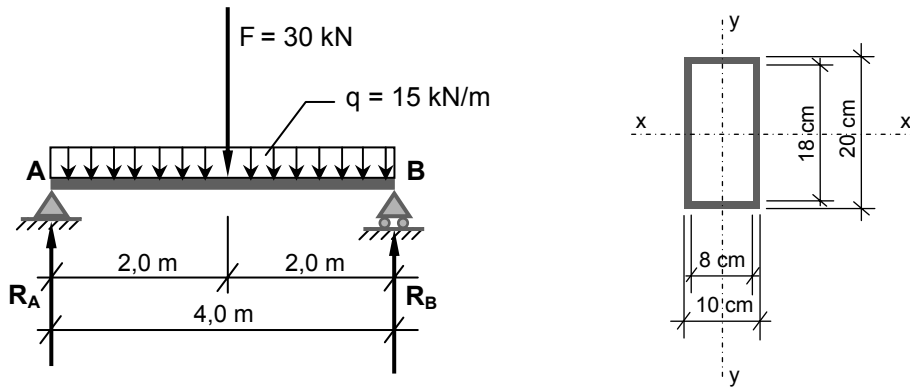
$$F_{\text{κρ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{\ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 341,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(2800 \text{ mm})^2}$$

$$F_{\text{κρ.}} = 901440 \text{ N} = 901,44 \text{ kN}$$

*Επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού*

$$F_{\text{επ.}} = \frac{F_{\text{κρ.}}}{\gamma} = \frac{901,44 \text{ kN}}{2,5} = \underline{\underline{360,58 \text{ kN}}}$$

16. Αμφιέριστη μεταλλική δοκός με κοίλη ορθογωνική διατομή φορτίζεται όπως στο σχήμα 14. Να υπολογίσετε τις μέγιστες τάσεις θλίψης και εφελκυσμού που αναπτύσσονται στη διατομή της. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 14

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B - 15 \cdot 4 - 30 = 0$$

$$R_A + R_B = 90 \text{ kN}$$

$$R_A = R_B = 45 \text{ kN}$$

$$M_{max} = R_A \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 45 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ kNm}$$

$$I_{x-x} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} - \frac{8 \cdot 18^3}{12} = 6666,667 - 3888 = 2778,667 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{60 \text{ kNm} \cdot 10 \text{ cm}}{2778,667 \text{ cm}^4} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 10^2 \text{ mm}}{2778,667 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 215,9 \text{ N/mm}^2$$

Πάνω μέρος  $\sigma = 215,9 \text{ N/mm}^2$  θλιπτική

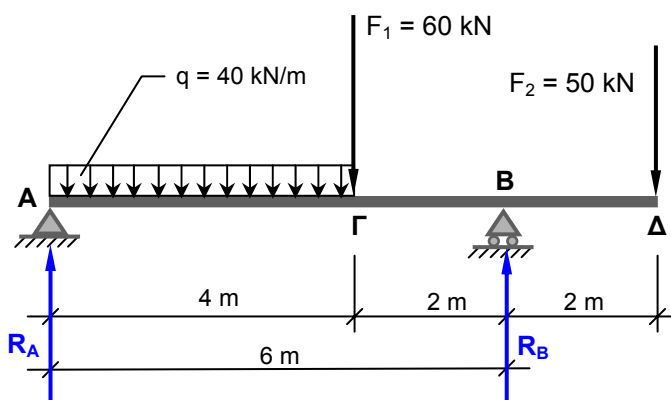
Κάτω μέρος  $\sigma = 215,9 \text{ N/mm}^2$  εφελκυστική

**ΜΕΡΟΣ Γ΄**

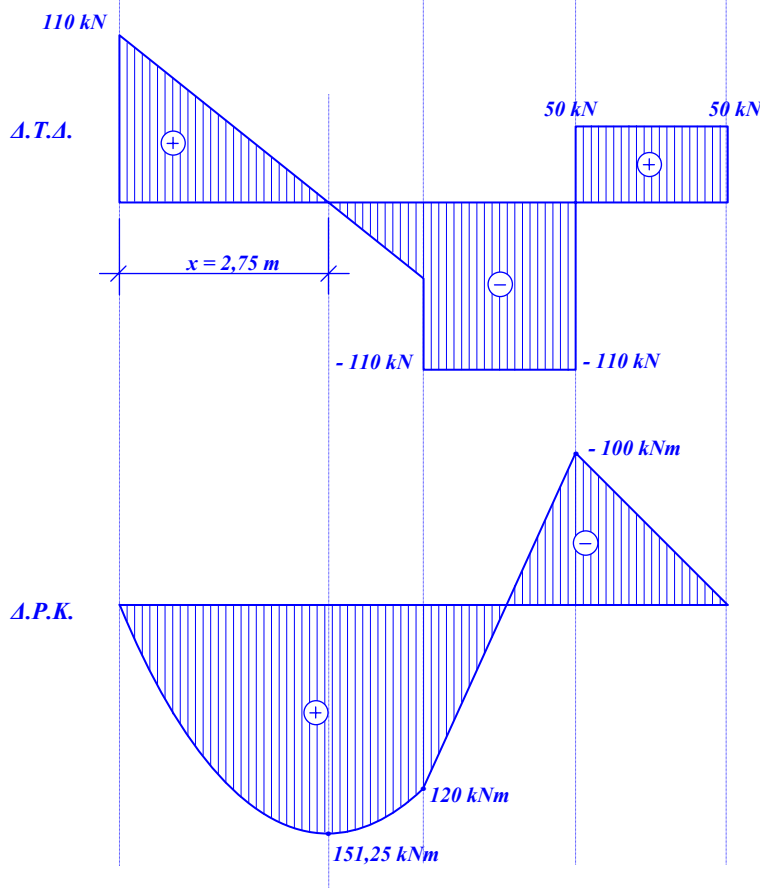
Η ορθή απάντηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 15.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση **x** από το σημείο στήριξης **A**, όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης **M<sub>max</sub>**.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M<sub>max</sub>**.
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και ροπών κάμψης **M** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M<sub>max</sub>**.



ΣΧΗΜΑ 15



*Υπολογισμός αντιδράσεων*

$$\Sigma M_A = 0$$

$$40 \cdot 4 \cdot 2 + 60 \cdot 4 - R_B \cdot 6 + 50 \cdot 8 = 0$$

$$320 + 240 - 6R_B + 400 = 0$$

$$6R_B = 960$$

$$R_B = \underline{160 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 40 \cdot 4 \cdot 4 - 60 \cdot 2 + 50 \cdot 2 = 0$$

$$6R_A - 640 - 120 + 100 = 0$$

$$6R_A = 660$$

$$R_A = \underline{110 \text{ kN}}$$

*Έλεγχος*

$$\Sigma F_y = 0$$

$$110 + 160 - 40 \cdot 4 - 60 - 50 = 0$$

*Τέμνουσες δυνάμεις*

$$Q_A = R_A = 110 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma(\text{αρι})} = 110 - 40 \cdot 4 = -50 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma(\text{δεξ})} = -50 - 60 = -110 \text{ kN}$$

$$Q_{B(\text{αρι})} = -110 \text{ kN}$$

$$Q_{B(\text{δεξ})} = -110 + 160 = 50 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta(\text{αρι})} = 50 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta} = 50 - 50 = 0$$

*Σημείο μηδενικής τέμνουσας δύναμης*

$$R_A - q \cdot x = 0$$

$$110 - 40 \cdot x = 0$$

$$\underline{x = 2,75 \text{ m}}$$

*Ροπές κάμψης*

$$M_A = 0$$

$$M_{max} = 110 \cdot 2,75 - 40 \cdot 2,75 \cdot 1,375 = 151,25 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma} = 110 \cdot 4 - 40 \cdot 4 \cdot 2 = 120 \text{ kNm}$$

$$M_B = 110 \cdot 6 - 40 \cdot 4 \cdot 4 - 60 \cdot 2 = -100 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 0$$

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

<i>Ανάλυση δυνάμεων</i>	$F_x = F \cdot \text{συν}\varphi$ $F_y = F \cdot \text{ημ}\varphi$
<i>Ροπή δύναμης</i>	$M = F \cdot \alpha$
<i>Συνθήκες ισορροπίας</i>	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$
<i>Ροπές αδράνειας</i>	$I_{x-x} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x-x} = I_{y-y} = \frac{\pi D^4}{64}$
<i>Ακτίνα αδράνειας</i>	$i_x = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}}$ $i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
<i>Ροπές αντίστασης</i>	$W_x = \frac{I_{x-x}}{y}$ $W_x = \frac{bh^2}{6}$
<i>Απλή κάμψη</i>	$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$
<i>Λυγισμός</i>	$F_{\text{κρ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{\ell^2}$ $F_{\text{επ.}} = \frac{F_{\text{κρ.}}}{\gamma}$

**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**