<table>
<tr><td colspan="4">ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)</td></tr>
<tr><td colspan="4">ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</td></tr>
<tr><td>ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</td><td colspan="3">ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td rowspan="2">Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td colspan="2">Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης</td></tr>
<tr><td>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</td><td>Μαθηματικές Πρακτικές</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Τριγωνομετρικός κύκλος (Α6.10) Ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κατασκευάζουν τη γραφική τους παράσταση (εξετάζουν αν είναι άρτιες ή περιττές ή/και περιοδικές) και αποδεικνύουν τριγωνομετρικές ταυτότητες.</td><td>1.1 Κατασκευάζουν γωνίες σε κανονική θέση και να αναφέρουν γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά, όταν αυτές τοποθετηθούν σε κανονική θέση.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Κατασκευή γωνίας
✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Νέες Έννοιες
✓ Γωνία σε κανονική θέση με αρχική πλευρά το θετικό ημιάξονα των τετμημένων</td><td>Παράδειγμα:
Γωνίες σε κανονική θέση
• Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω γωνίες σε κανονική θέση και να αναφέρετε ποιες από αυτές έχουν την ίδια τελική πλευρά:

(α) $135°$ (β) $-90°$
(γ) $660°$ (δ) $270°$</td><td rowspan="2">ΜΠ.6 Ακρίβεια
Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.
Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

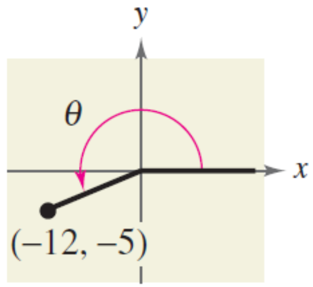
(α) Η παράσταση
$ημ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+συν(\pi-\theta)+συν\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+ημ(\pi-\theta)$
είναι ίση με:

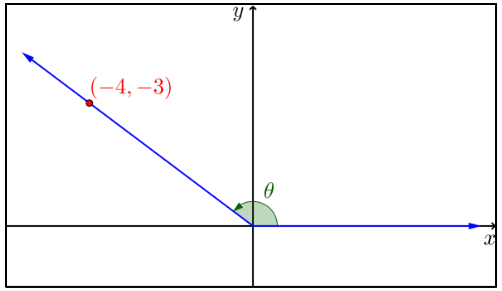
Α. 0 Β. $2ημ\theta$ Γ. $-2συν\theta$ Δ. $ημ\theta+συν\theta$

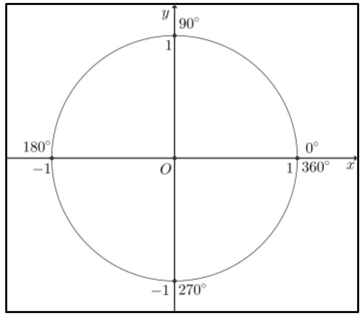
(β) Αν $συν\theta<0$ και $εφ\theta<0$, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν αυτή τοποθετηθεί σε κανονική θέση;

Α. $1^ο$ Β. $2^ο$ Γ. $3^ο$ Δ. $4^ο$</td></tr>
<tr><td>1.2 Εκφράζουν γωνίες από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα.</td><td>Παραδείγματα:
Έκφραση γωνιών από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα</td></tr>
</table>

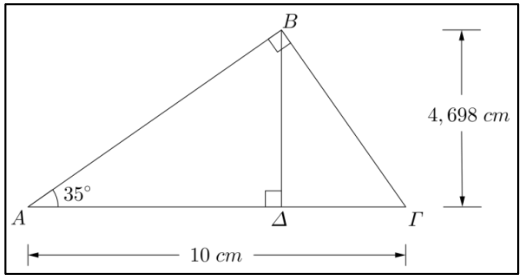
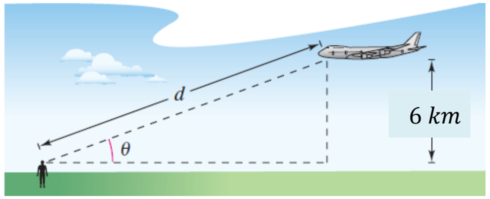
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Α6.10) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

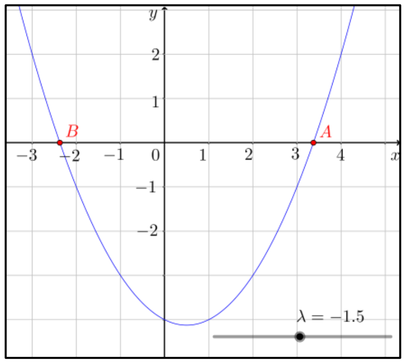
<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Μέτρο γωνίας
Νέες Έννοιες
✓ Μονάδες μέτρησης τόξου
✓ Τόξο ενός ακτινίου
✓ Ακτίνιο</td>
<td>• Να εκφράσετε τις πιο κάτω γωνίες σε ακτίνια:
(α) 30° (β) -60°
(γ) 315° (δ) 930°
• Να εκφράσετε τις πιο κάτω γωνίες σε μοίρες:
(α) $\frac{\pi}{2}$ (β) $\frac{11\pi}{6}$
(γ) $-\frac{2\pi}{3}$ (δ) 7π</td>
<td rowspan="3">(γ) Οι λύσεις της εξίσωσης
$$4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
είναι οι:
Α. $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ Β. $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ Γ. $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ Δ. $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$
(δ) Στο πιο κάτω σχήμα, η γωνία θ είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση.


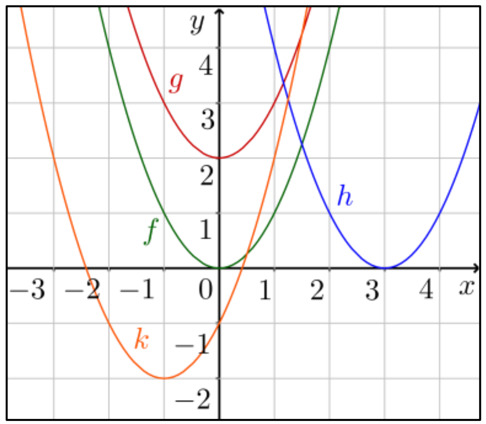
Η εφθ είναι ίση με:
Α. -12 Β. -5 Γ. $\frac{5}{12}$ Δ. $\frac{12}{5}$
Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις;
• Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;
ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών
Οργανώνω τις έννοιες της Τριγωνομετρίας, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.
Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Στη</td>
</tr>
<tr>
<td>1.3 Υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας που είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση.
Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε ορθογώνιο τρίγωνο
Νέες Έννοιες
✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας που είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση.
➢ Ημίτονο γωνίας θ (ημθ)
➢ Συνημίτονο γωνίας θ (συνθ)
➢ Εφαπτομένη γωνίας θ (εφθ)
➢ Συνεφαπτόμενη γωνίας θ (σφθ)</td>
<td>Παράδειγμα:
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση
• Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται μία γωνία θ τοποθετημένη σε κανονική θέση. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

</td>
</tr>
<tr>
<td>1.4 Χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να:
➢ υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς</td>
<td>Παραδείγματα:
Τριγωνομετρικός κύκλος
• Να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό κύκλο, για να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς</td>
</tr>
</table>

	αριθμούς γωνίας ➢ βρίσκουν το πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ➢ εντοπίζουν σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά γωνίας **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας που είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση. **Νέες Έννοιες** ✓ Τριγωνομετρικός κύκλος	αριθμούς: (α) $ημ180°$ (β) $συν(-270°)$ (γ) $εφ720°$ (δ) $ημ\frac{3\pi}{2}$ • Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο: (α) $122°$ (β) $-57°$ (γ) $541°$ (δ) $-\frac{7\pi}{12}$ • Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν: (α) $ημ\theta > 0$, $σφ\theta > 0$ (β) $συν\theta > 0$, $ημ\theta < 0$ (γ) $σφ\theta > 0$, $συν\theta < 0$ (δ) $ημ\theta > 0$, $εφ\theta < 0$ • Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή των παραστάσεων: (α) $y = 4 + 2συνx, x \in [0, \pi]$ (β) $y = 3 - ημ^2 x, x \in \mathbb{R}$	συνέχεια, να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο $224°$.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Με ποιο τρόπο μπορώ να συνδέσω τον τριγωνομετρικό κύκλο με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$; • Ποια παρατήρηση πρέπει να κάνω, για να βρω το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας που έχει μέτρο $224°$;
2. **Τριγωνομετρικές εξισώσεις** (Α6.16) Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.	2.1 Επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης ✓ Τριγωνομετρικός κύκλος **Νέες έννοιες** ✓ Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε συγκεκριμένο διάστημα	**Παράδειγμα:** *Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης* • Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3}ημx + 1 = 0, x \in [0°, 90°]$	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* • **Παράδειγμα:** Να υπολογίσετε τη γωνία θ, $90° < \theta < 180°$, αν: $\frac{ημ\theta \cdot συν(180° - \theta) \cdot εφ(90° - \theta)}{συν\theta \cdot σφ(180° - \theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

	2.2 Εφαρμόζουν τις σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα $90°, 180°$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Τριγωνομετρικός Κύκλος **Νέες έννοιες** ✓ Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα $90°, 180°$	**Παράδειγμα:** *Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών* • Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας: (α) $\eta\mu 128°$ (β) $\sigma\upsilon\nu 133°$ (γ) $\varepsilon\varphi 111°$ (δ) $\sigma\varphi(147°)$	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορώ να απλοποιήσω την πιο πάνω εξίσωση; • Υπάρχει κάποιος μαθηματικός κανόνας, για να απλοποιήσω την εξίσωση και να βρω τις λύσεις της; • Τι παρατηρώ, αν το πρόβλημα είχε ως δεδομένο ότι $0° < \theta < 90°$;
3. **Τριγωνομετρικές ταυτότητες** (Α6.17) Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.	3.1 Αποδεικνύουν τριγωνομετρικές ταυτότητες. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες **Νέες έννοιες** ✓ Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων με την βοήθεια των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών και βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων	**Παράδειγμα:** *Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων* • Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες: (α) $\sigma\varphi x \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (β) $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$ (γ) $(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega)\cdot(1 + \sigma\varphi^2\omega) = 1$	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές ιδέες.* **Παραδείγματα:** Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες: (α) $\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x} = (\tau\varepsilon\mu x - \varepsilon\varphi x)^2$ (β) $\frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu x - \sigma\varphi x} = \sigma\tau\varepsilon\mu x + \sigma\varphi x$ (γ) $\frac{1-\varepsilon\varphi^2\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta} = 1 - 2\eta\mu^2\theta$ *Απαντώ στην ερώτηση:* • Πώς ελέγχω την ορθότητα της απάντησής μου;
	3.2 Χρησιμοποιούν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, για να υπολογίζουν	**Παραδείγματα:** *Χρήση βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων* • Να υπολογίσετε τη γωνία θ, $90° < \theta < 180°$, αν:	

	τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες **Νέες έννοιες** ✓ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων	$\frac{ημ(-\theta)\cdot συν(180^\circ+\theta)}{ημ(270^\circ-\theta)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ • Αν $ημ\theta=-\frac{4}{5}$ και $180^\circ<\theta<270^\circ$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.	
4. **Επίλυση προβλήματος** (Α6.18) Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.	4.1 Χρησιμοποιούν τις έννοιες της Τριγωνομετρίας, για να επιλύουν προβλήματα. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες **Νέες έννοιες** ✓ Επίλυση προβλήματος με τη χρήση τριγωνομετρίας	**Παράδειγμα:** *Επίλυση προβλήματος* • Με βάση τα δεδομένα του πιο κάτω σχήματος, να υπολογίσετε: (α) το μήκος της $ΑΔ$ (β) το μήκος της $ΑΒ$ (γ) το μήκος της $ΑΓ$ 	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Ένα αεροπλάνο πετά σε ύψος 6 km και περνά ακριβώς πάνω από έναν παρατηρητή. Αν θ είναι η γωνία που βλέπει ο παρατηρητής το αεροπλάνο σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε την απόσταση d του αεροπλάνου από τον παρατηρητή, όταν: (α) $\theta=30^\circ$ (β) $\theta=60^\circ$ (γ) $\theta=135^\circ$  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;

			• Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου
5. **Γραφική παράσταση της $\boldsymbol{y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0}$** (Α5.9) Αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και αναγνωρίζουν πώς προκύπτει από την παραβολή $y = ax^2$ με μετατόπιση.	5.1 Μετατοπίζουν τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2$ κατάλληλα, ώστε να προκύπτει η γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Έννοια - αναπαράσταση συνάρτησης ✓ Πεδίο ορισμού - σύνολο τιμών συνάρτησης ✓ Είδος ριζών της $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης $y = ax^2$, $a \neq 0$ (Ορισμός – Στοιχεία) ✓ Παράλληλη μεταφορά γεωμετρικού σχήματος **Νέες έννοιες** ✓ Γραφική Παράσταση – Στοιχεία της $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ ✓ Ερμηνεία οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης	**Παραδείγματα:** *Γραφική Παράσταση – Στοιχεία της* $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ • Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση, όταν η παραβολή $y = 4x^2$ μετατοπίζεται κατά: (α) 1 μονάδα πάνω (β) 3 μονάδες δεξιά • Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^2$ θα συμπέσει, με κατάλληλες μετατοπίσεις, με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: (α) $g(x) = -2x^2 + 5$ (β) $h(x) = -2x^2 + 4x + 3$ • Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας, την κορυφή και τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω παραβολών. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά. (α) $f_1(x) = x^2 - 2$ (β) $f_2(x) = x^2 - 5x + 4$ (γ) $f_3(x) = -(x-2)^2$ (δ) $f_4(x) = (x+1)^2 - 4$	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ), για να αναπαραστήσω μαθηματικές καταστάσεις.* **Παράδειγμα:** (α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $(\lambda + 2) \cdot x^2 - (\lambda + 2) \cdot x - 4$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ. (β) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda + 2) \cdot x^2 - (\lambda + 2) \cdot x - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ακολούθως, να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματά σας με τη χρήση του πιο κάτω εφαρμογιδίου.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο να επιβεβαιώσω τα αποτελέσματά μου;

6. **Χρήση μετασχηματισμών** (Α6.5) Κατασκευάζουν συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x+h), f(x)+k,$ $cf(x), f(cx)$.	6.1 Βρίσκουν τους τύπους και κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x+h), f(x)+k,$ $cf(x), f(cx)$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός – στοιχεία – γραφική παράσταση συνάρτησης $y = ax^2, a \neq 0$ ✓ Παράλληλη μεταφορά γεωμετρικού σχήματος **Νέες έννοιες** ✓ Εύρεση τύπου συνάρτησης $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \delta$ που προκύπτει από μετασχηματισμό της $y = ax^2$	**Παράδειγμα:** *Εύρεση τύπου συνάρτησης μέσω μετασχηματισμών* • Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -2x^2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις με τύπους $g(x) = f(x+2)$, $h(x) = f(x) - 4$, $k(x) = 3f(x)$, $p(x) = f(-2x)$ και να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις, επεξηγώντας πλήρως πώς αυτές προκύπτουν μέσα από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f.	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και γενικεύω.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h και k.  Με δεδομένο ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = x^2$, να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g, h και k, αν είναι μετατοπίσεις της f. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι παρατηρώ για τη σχέση που συνδέει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h και k; • Με ποιο τρόπο μπορώ να χρησιμοποιήσω το πιο πάνω διάγραμμα, για να βρω τους τύπους των συναρτήσεων g, h και k;

<table>
<tr>
<td rowspan="2">7. Ανισώσεις – Συστήματα β’ βαθμού (Α6.12)
Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, καθώς και συστήματα δύο και τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.</td>
<td>7.1 Μελετούν το πρόσημο του τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Επίλυση εξίσωσης β’ Βαθμού
✓ Υπολογισμός διακρίνουσας και
✓ Είδος ριζών
Νέες έννοιες
✓ Πρόσημο τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$ στις διάφορες περιοχές του $\mathbb{R}$</td>
<td>Παραδείγματα:
Πρόσημο τριωνύμου
$y=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$
• Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x:
(α) $x^2-10x+9$
(β) $-3x^2+x-7$
(γ) $-9+6x-x^2$
(δ) $4-9x^2$
• Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=3x^2-8x-3, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω αριθμών:
(α) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
(β) $f(5)$
(γ) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$
(δ) $f(-2016)$</td>
<td rowspan="2">ΜΠ.6 Ακρίβεια
Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.

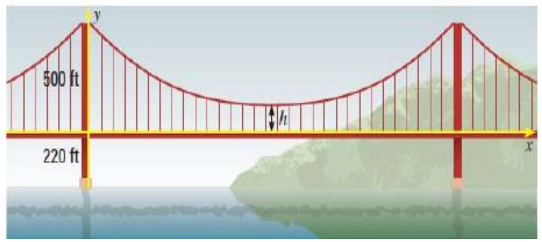
Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:
(α) Η εξίσωση με ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=-3$ είναι η:
Α. $x^2-x-6=0$ Β. $x^2-x+6=0$
Γ. $x^2+x+6=0$ Δ. $x^2+x-6=0$

(β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-2x^2+x+6, x\in\mathbb{R}$. Είναι:
Α. $f(2)=0, f(1)<0$ Β. $f(1)>0, f(0)<0$
Γ. $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0, f(9)>0$ Δ. $f(2)=0, f(9)<0$

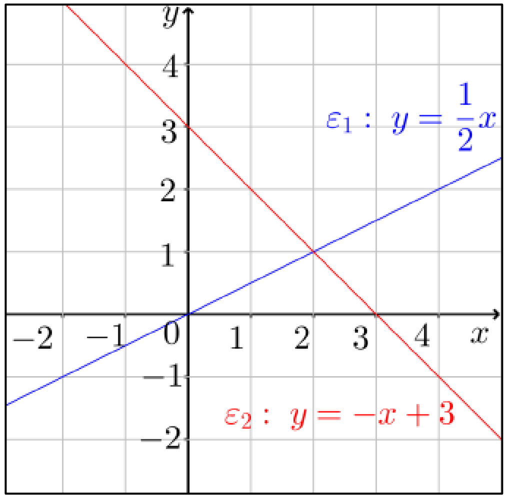
(γ) Οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ y=0\end{cases}$ είναι οι:
Α. $(x,y)=(0,0)$
$(x,y)=(0,4)$
Β. $(x,y)=(4,0)$
$(x,y)=(0,4)$
Γ. $(x,y)=(0,0)$
$(x,y)=(4,0)$
Δ. $(x,y)=(0,0)$
$(x,y)=(4,4)$

(δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$ είναι:
Α. $[-1,2]$ Β. $(-1,2)$
Γ. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ Δ. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$</td>
</tr>
<tr>
<td>7.2 Επιλύουν ανισώσεις και συστήματα β’ βαθμού.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Πρόσημο τριωνύμου $ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$ στις διάφορες περιοχές του $\mathbb{R}$
✓ Ανισώσεις α’ βαθμού
✓ Λύση συστήματος
Νέες έννοιες
✓ Επίλυση ανίσωσης β’ βαθμού
✓ Επίλυση συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους β’ βαθμού</td>
<td>Παραδείγματα:
Επίλυση ανίσωσης β’ βαθμού συστήματος β’ βαθμού
• Να λύσετε το σύστημα:
$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ 4x-3y=0\end{cases}$
• Για ποιες πραγματικές τιμές του x αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις;
(α) $x^2-49\leq 0$ (β) $x(x+2)>3$
(γ) $x^2+1>0$ (δ) $-x^2-12\geq 0$
• Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο
$f(x)=\sqrt{-2x^2+8x-6}$
• Για ποιες τιμές της παραμέτρου k το τριώνυμο $x^2-(k+2)\cdot x+k+5$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματική τιμή του x;</td>
</tr>
</table>

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτά τα προβλήματα;
8. **Τύποι Vietta** (Α6.13) Διερευνούν το είδος και το πλήθος των ριζών τριωνύμου δεύτερου βαθμού και τις μεταξύ τους σχέσεις (τύποι Vietta) και τις εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων.	8.1 Βρίσκουν το είδος των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$, το άθροισμα και το γινόμενό τους, χωρίς να την επιλύουν. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού **Νέες Έννοιες** ✓ Τύποι Vietta: (α) Άθροισμα ριζών $S=x_1+x_2$ της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0, a\neq 0$ (β) Γινόμενο ριζών $P=x_1\cdot x_2$ της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0, a\neq 0$	**Παραδείγματα:** *Είδος – Άθροισμα – Γινόμενο των Ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0, a\neq 0$* • Δίνεται η εξίσωση $3x^2-5x+2=0$. (α) Να βρείτε το είδος των ριζών της x_1, x_2. (β) Σε πόσα σημεία η παραβολή με τύπο $f(x)=3x^2-5x+2, x\in\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων; (γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: i. x_1+x_2 ii. $x_1\cdot x_2$ iii. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ iv. $x_1^2+x_2^2$ • Δίνεται η εξίσωση $2x^2+(k-1)x-3=0, k\in\mathbb{R}$ με ρίζες x_1, x_2. Να υπολογίσετε την τιμή του k, ώστε να ισχύει: (α) $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$ (β) $x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2=0$	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τα στοιχεία της παραβολής $y=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Το κάθε σχοινί που ενώνει δύο πασσάλους στο πιο κάτω γεφύρι, περιγράφεται από την εξίσωση $y=\frac{1}{9000}x^2-\frac{7}{15}x+500$, όπου τα x και y μετρούνται σε πόδια (ft). Να υπολογίσετε το ύψος h του σχοινιού από το δρόμο στο χαμηλότερο του σημείο.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων x και y; • Πώς σχετίζεται το πρόβλημα αυτό με τα στοιχεία της παραβολής $y=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$;
	8.2 Κατασκευάζουν εξισώσεις β' βαθμού, αν είναι γνωστές οι ρίζες τους x_1, x_2. **Προαπαιτούμενες γνώσεις**	**Παράδειγμα:** *Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού* • Να γράψετε μία εξίσωση β' βαθμού με ρίζες: (α) 2 και $-\frac{1}{2}$ (β) $3-\sqrt{7}$ και $3+\sqrt{7}$	

	✓ Τύποι Vietta: (α) Άθροισμα ριζών $S = x_1 + x_2$ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ (β) Γινόμενο ριζών $P = x_1 \cdot x_2$ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ **Νέες έννοιες** ✓ Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού με την βοήθεια του τύπου $x^2 - Sx + P = 0$		• Ποια στοιχεία της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;
9. **Παραγοντοποίηση τριωνύμου** (Α6.14) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τον τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$.	9.1 Μετατρέπουν τριώνυμα της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ σε γινόμενα πρωτοβάθμιων παραγόντων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού **Νέες έννοιες** ✓ Παραγοντοποίηση τριωνύμων της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$	**Παράδειγμα:** *Παραγοντοποίηση τριωνύμων της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$* • Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: (α) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$ (β) $\frac{2x^2-5x+2}{2x^2-9x+4}$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** Να επιλέξετε την ορθή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: Το κλάσμα $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$ ισούται με: **Α.** $\frac{1}{4}$ **Β.** $\frac{x-1}{x}$ **Γ.** $\frac{x-1}{x-4}$ **Δ.** $\frac{x-4}{x}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτά τα προβλήματα;

10.**Επίλυση – Διερεύνηση εξίσωσης πρώτου βαθμού – γραμμικού συστήματος** (Α6.12) Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού, καθώς και συστήματα δύο και τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	10.1 Επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις πρώτου βαθμού. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Επίλυση εξίσωσης α' βαθμού με έναν άγνωστο ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. **Νέες έννοιες** ✓ Παραμετρική εξίσωση της μορφής $ax=\beta$, όπου $a,\beta\in\mathbb{R}$ ✓ Διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης	**Παράδειγμα:** *Λύση – Διερεύνηση εξίσωσης α' βαθμού* • Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ: (α) $(\lambda-3)x=\lambda^2-\lambda-6$ (β) $(\lambda^2-16)x=\lambda^2+4\lambda$	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (μία γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να καταλαβαίνω τις έννοιές τους.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών ε_1 και ε_2. Να βρείτε τη λύση του συστήματος των ευθειών ε_1 και ε_2 αλγεβρικά και γραφικά.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες πληροφορίες έχω; • Θα ήταν χρήσιμο σε αυτήν την περίπτωση να χρησιμοποιήσω κατάλληλο λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας;
	10.2 Επιλύουν προβλήματα με βάση το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Παραμετρική εξίσωση της μορφής $ax=\beta$, όπου $a,\beta\in\mathbb{R}$ ✓ Διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης **Νέες έννοιες** ✓ Λύση προβλημάτων που σχετίζονται με το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης α' βαθμού	**Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος** • Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η εξίσωση $3kx-21=k^2x-7k$: (α) να έχει μοναδική λύση, την $x=1$ (β) να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ (γ) να είναι αόριστη στο $\mathbb{R}$	
	10.3 Επιλύουν και να διερευνούν γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο	**Παράδειγμα:** *Λύση – Διερεύνηση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους*	

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td>αγνώστους.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
Νέες έννοιες
✓ Διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους</td>
<td>• Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3x-6y=2 \\ x+\lambda y=-1 \end{cases}$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.</td>
<td rowspan="2">ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος
Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Ποια είναι η τιμή του γ, αν ισχύουν τα πιο κάτω;
$$\begin{cases} 2a+\beta=26 \\ a+2\beta+\gamma=32 \\ a+\beta+\gamma=24 \end{cases}$$
Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;
• Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;
• Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω;
• Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω;
• Είναι η απάντησή μου λογική;
• Πώς αξιολογώ τη λογικότητα της απάντησής μου;</td>
</tr>
<tr>
<td>10.4 Επιλύουν προβλήματα με βάση το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους
Νέες έννοιες
✓ Λύση προβλημάτων που σχετίζονται με το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.</td>
<td>Παράδειγμα:
Επίλυση προβλήματος
• Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε το σύστημα $\begin{cases} kx+2y=7 \\ 4x-3y=\lambda+1 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{R}$.</td>
</tr>
</table>

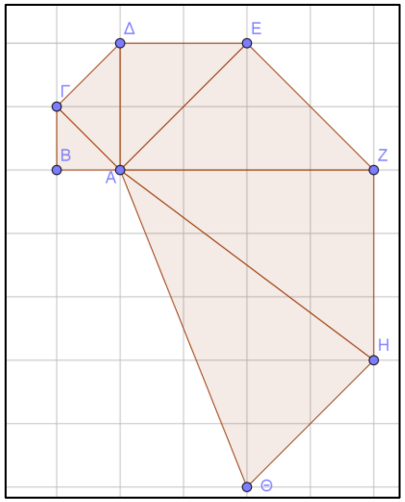
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΡΙΘΜΟΙ)			
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Έννοια-ιδιότητες νιοστής ρίζας** (Αρ6.2**) Ορίζουν την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού a και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $\nu \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+$.	1.1. Ορίζουν τη νιοστή ρίζα πραγματικού μη-αρνητικού αριθμού a ($\sqrt[\nu]{a}, \nu \in \mathbb{N}$). **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ορισμός τετραγωνικής ρίζας μη-αρνητικού αριθμού a $(a \geq 0)$ ✓ Ορισμός κυβικής ή τρίτης ρίζας μη-αρνητικού αριθμού a $(a \geq 0)$ **Νέες Έννοιες** ✓ Νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[\nu]{a},\ \nu \in \mathbb{N}$).	**Παραδείγματα:** *Ορισμός νιοστής ρίζας* • Να γράψετε μια ισοδύναμη πρόταση για τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z: (α) $x = \sqrt[5]{2}$ (β) $y = \sqrt[7]{3}$ (γ) $z = \sqrt[3]{10}$ • Ποιος αριθμός, όταν υψωθεί στη 10^{η} δύναμη, μας δίνει 3; Να δώσετε την ακριβή μορφή του αριθμού. Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παραδείγματα:** (α) Να ερμηνεύσετε με λόγια τον πραγματικό αριθμό $a = \sqrt[3]{14}$. (β) Να εκτιμήσετε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών βρίσκεται το $a = \sqrt[3]{14}$. Να αναφέρετε σε ποιο από τους δύο αριθμούς βρίσκεται πιο «κοντά», αιτιολογώντας την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς ο ορισμός της νιοστής ρίζας με βοηθά στην ερμηνεία του αριθμού $a = \sqrt[3]{14}$; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε εκτίμηση του

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Αρ6.2) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			$a = \sqrt[3]{14}$; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;
	1.2. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες νιοστών ριζών μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας πραγματικού μη αρνητικού αριθμού $\sqrt[\nu]{a},\ \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Αν $a > 0, \beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $\mu, \nu \neq 0$, τότε: ➢ $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$ ➢ $\frac{a^{\mu}}{a^{\nu}} = a^{\mu-\nu}$ ➢ $(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}$ ➢ $a^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (a \cdot \beta)^{\nu}$ ➢ $\frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu}$ **Νέες Έννοιες** ✓ Ιδιότητες ριζών: Αν $a, \beta \geq 0$ και $\mu, \nu > 0$: ➢ $\sqrt[\nu]{a^{\nu}} = a$ ➢ $\sqrt[\nu]{a\beta} = \sqrt[\nu]{a}\sqrt[\nu]{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ ➢ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}} = \sqrt[\nu\mu]{a},$ ➢ $\sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$	**Παράδειγμα:** *Απόδειξη ιδιοτήτων νιοστών ριζών και εφαρμογή τους* • Αν $a \geq 0$ και ν, κ θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι: i. $\sqrt[\nu]{a^{\nu} \cdot \beta} = a \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ ii. $(\sqrt[\nu]{a})^{\kappa} = \sqrt[\nu]{a^{\kappa}}$ • Να βρείτε ακέραιους x, y ώστε να ισχύει $\sqrt[5]{192} = x \cdot \sqrt[5]{y}$.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς $A = \sqrt[3]{2}$ και $B = \sqrt[10]{10}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορώ να αναπαραστήσω τα δεδομένα του προβλήματος με ισοδύναμο τρόπο; • Γιατί δεν είναι συγκρίσιμοι οι αριθμοί, όπως έχουν δοθεί; • Ποια ιδιότητα θα με βοηθούσε ώστε να έχουμε τους δύο αριθμούς με τον ίδιο δείκτη (ή τον ίδιο εκθέτη);

2. **Δυνάμεις με ρητό εκθέτη** (Αρ6.4) Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.	2.1 Ορίζουν τη δύναμη μη-αρνητικού αριθμού α με ρητό εκθέτη $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, ως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ και μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\alpha > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α ($\sqrt[\nu]{\alpha}, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες ριζών **Νέες Έννοιες** ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α με ρητό εκθέτη ($\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α, όπου α δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}, \nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$). **Σημείωση** ✓ Ειδικά, ορίζουμε $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0, \nu \in \mathbb{N}$.	**Παραδείγματα:** *Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη* • Να γράψετε ισοδύναμες προτάσεις για τις πιο κάτω δυνάμεις, όταν $x > 0$: (α) x^3 (β) x^{-3} (γ) $x^{\frac{1}{3}}$ (δ) $x^{-\frac{1}{3}}$ • Να υπολογίσετε τους αριθμούς: (α) $8^{\frac{2}{3}}$ (β) $9^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ • Να εκφράσετε το γινόμενο $2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και να κατανοήσω καλύτερα τις ιδιότητες των ριζών.* **Παραδείγματα:** Ένας μαθητής έγραψε τον αριθμό $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}, \alpha > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους όπως φαίνεται πιο κάτω: i. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = (\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}$ ii. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$ Να γράψετε τι «προσφέρει» ο κάθε τρόπος γραφής και σε ποιες ισοδύναμες ιδιότητες μπορούμε να καταλήξουμε. Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό $8^{\frac{2}{3}}$, για να στηρίξετε τον ισχυρισμό σας και να αποφασίσετε ποιος από τους δύο τρόπους γραφής δίνει απλούστερο αποτέλεσμα. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς γράφεται ο αριθμός $x^{\frac{1}{\nu}}, x > 0$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $(x^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$;
	2.2. Μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, όπου α μη-αρνητικός πραγματικός	**Παραδείγματα:** *Μετατροπή δυνάμεων με ρητό εκθέτη της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$* • Να εκφράσετε σε μορφή δύναμης τα πιο κάτω:	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, θετικού αριθμού υψωμένου σε δύναμη για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις*

	αριθμός και $\nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[\nu]{a}, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Ιδιότητες τετραγωνικών και κυβικών ριζών. **Νέες Έννοιες** ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a με ρητό εκθέτη ($a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a, όπου α δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[\nu]{a^\mu}, \nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}$)	(α) $\sqrt[3]{a}$ (β) $\sqrt[4]{\beta^3}$ (γ) $\sqrt[6]{\gamma^4}$ • Να εκφράσετε στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^\mu}$ τα πιο κάτω: (α) $x^{\frac{4}{3}}$ (β) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$ (γ) $\left(2^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ (δ) $3^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 5^{\frac{\mu}{\nu}}$	*μεταξύ τους.* **Παραδείγματα:** Να ελέγξετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους: (α) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ και $x^2, x > 0$. (β) $\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}$ και $\sqrt{a^3}$. (γ) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ και $\sqrt[4]{10^3}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ισχύει η ιδιότητα $a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί; • Ισχύει η ιδιότητα $(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί;
3. **Μετασχηματισμός αριθμητικών παραστάσεων** (Αρ6.9) Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες παραστάσεις με ρητό παρονομαστή.	3.1. Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ιδιότητες ριζών **Νέες Έννοιες** ✓ Ισοδύναμες κλασματικές παραστάσεις με άρρητο και ρητό παρονομαστή ✓ Μετασχηματισμός παράστασης με άρρητο	**Παραδείγματα:** *Μετατροπή παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.* • Να μετατρέψετε τις παραστάσεις $B = \frac{10}{\sqrt{2}}$ και $\Gamma = \frac{21}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ σε ισοδύναμές τους με ρητό παρονομαστή. • Αν $x, y > 0$ και $x \neq y$, να αποδείξετε ότι: ➢ $\frac{2+\sqrt{x}}{4-x} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ ➢ $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x + y + \sqrt{xy}$	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς.* **Παραδείγματα:** (α) Να εξηγήσετε γιατί οι πιο κάτω παραστάσεις είναι ισοδύναμες και να αναφέρετε τις διαφορές τους. i. $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ και $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ ii. $\frac{24}{\sqrt{11}-3}$ και $12 \cdot (\sqrt{11} + 3)$

	παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.		(β) Πώς μπορείτε να βρείτε ισοδύναμη παράσταση με ρητό παρονομαστή με την $\frac{2\sqrt{3}}{6-\sqrt{18}}$; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα; • Ποια γνωστή ταυτότητα είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί ώστε να απαλείψει τα ριζικά της μορφής $a \pm \beta\sqrt{\gamma}$;
4. **Τιμή αριθμητικής παράστασης με ν −οστές ρίζες** (Αρ6.11) Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.	4.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και τους μετασχηματισμούς από αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν παραστάσεις και να υπολογίζουν την τιμή τους. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αριθμητικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε	**Παραδείγματα:** *Υπολογισμός αριθμητικής τιμής παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών* • Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $A = 64^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{6}}$. • Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt{12} + \sqrt{48} + \sqrt{108}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt{2}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$ (β) $\sqrt{\lambda}$ με $\lambda \in \mathbb{N}$ • Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt[3]{5}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$ (β) $\sqrt[3]{\lambda}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου $ΑΒΓΔΕΖΗΘΑ$ αν το κάθε ένα τετραγωνάκι έχει εμβαδόν ίσο με $1\ cm^2$. 

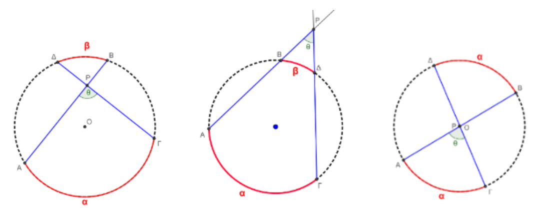
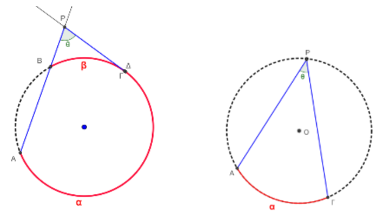
	ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή. **Νέες Έννοιες** ✓ Απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων ✓ Τιμή αριθμητικών παραστάσεων		*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Αν το $AB = B\Gamma = 1\ cm$, ποιο γνωστό θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$; • Γιατί το $A\Gamma \perp \Gamma\Delta$;
5. **Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης** (Αρ6.12) Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.	5.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς από παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή τους. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή	**Παράδειγμα:** *Υπολογισμός τιμής αλγεβρικών παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών* • Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 + \sqrt{3}$: (α) να υπολογίσετε την παράσταση $x^2 - y^2$ (β) να δείξετε ότι οι παραστάσεις $A = 3x^2 - 6x + 3$ και $B = 2y^2 - 4y + 2$ είναι ίσες	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια της ισοδύναμης παράστασης με ρητό παρονομαστή και τις ιδιότητες ριζών, για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις μεταξύ τους.* **Παραδείγματα:** Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A, όταν $x = 5$ μπορεί να πάρει τη μορφή $a\sqrt{6}$, $a \in \mathbb{N}$. $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορεί το κάθε κλάσμα να γραφεί ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή. • Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα. Ποιος είναι ο κοινός παρονομαστής του αθροίσματος;

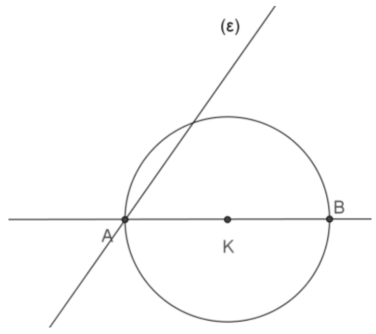
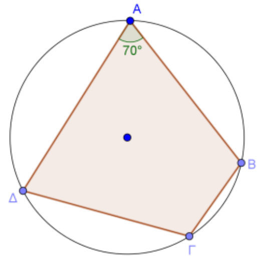
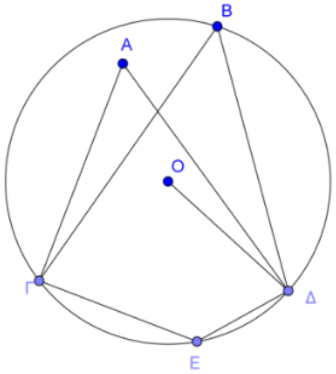
	Νέες Έννοιες ✓ Απλοποίηση αλγεβρικής παράστασης ✓ Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης		
6. **Επίλυση προβλημάτων με ν −οστές ρίζες** (Αρ6.13) Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη στην επίλυση προβλημάτων.	6.1 Μεταφράζουν λεκτικά προβλήματα σε αλγεβρικές παραστάσεις με ν −οστές ρίζες πραγματικού αριθμού και δυνάμεις με ρητό εκθέτη και τα επιλύουν. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Μετάφραση λεκτικών αναπαραστάσεων σε αριθμητικές και αλγεβρικές εκφράσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας ($\sqrt[\nu]{a}$, $\nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη **Νέες έννοιες** ✓ Επίλυση προβλημάτων με νιοστές ρίζες	**Παραδείγματα:** *Εφαρμογής των ιδιοτήτων στους αριθμούς με εκθέτη ρητό αριθμό* • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην 9^{η} δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $A = \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ στην μορφή $2^{\frac{\alpha}{\beta}}$ και στη μορφή $\sqrt[\nu]{\gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{N}$.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ των πιο κάτω άρρητων αριθμών είναι φυσικός αριθμός. $\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{20+\sqrt{399})}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορούμε να απλοποιήσουμε τους όρους του αθροίσματος; • Γιατί είναι χρήσιμο το ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή στο πρόβλημα μας;
7. **Επίλυση εξίσωσης** (Αρ6.15) Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.	7.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων	**Παραδείγματα:** *Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες.* • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $x^{\frac{2}{3}} = 8$	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Ποσό €20000 ανατοκίσθηκε για ένα χρονικό διάστημα προς 3% και έγινε €23185,48. Να

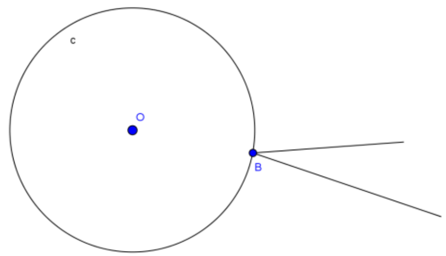
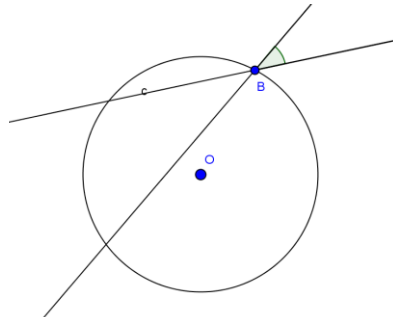
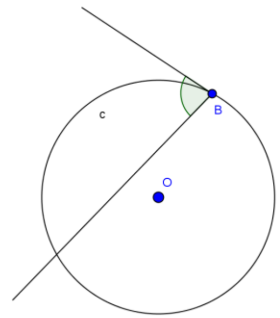
	με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να επιλύουν εξισώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Δυνάμεις πραγματικού αριθμού ✓ Διαδικασία επίλυσης εξίσωσης βαθμού $\nu \geq 2$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή **Νέες έννοιες** ✓ Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες	(β) $2(x-1)^{-\frac{3}{2}} = 54$ • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $2x^6 + 7 = 1465$ (β) $5(x+1)^4 = 80$ • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην 9^{η} δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε τον ν συναρτήσει των K_0, K_1 και τ, αν ισχύει $K_0(1+\tau)^{\nu} = K_1$.	υπολογίσετε το χρονικό διάστημα. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του πρώτου χρόνου, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι €20000 και το αντίστοιχο επιτόκιο 3%; • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του δεύτερου χρόνου; • Τι πρέπει να προσέξω για το αρχικό ποσό του δεύτερου χρόνου; • Ποιος γενικός τύπος προκύπτει για το ποσό στο τέλος του ν χρόνου και ποια είναι η αντίστοιχη εξίσωση στο πρόβλημα;

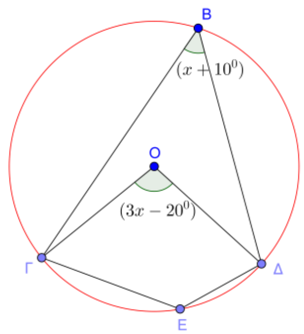
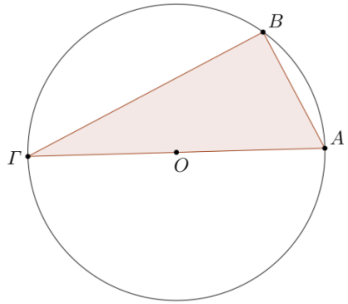
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)			
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Επαγωγικός συλλογισμός** (Γ5.1**) Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.	1.1. Διερευνούν σχέσεις και καταλήγουν σε γενικεύσεις από ειδικές περιπτώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός κύκλου ✓ Στοιχεία κύκλου (χορδή, διάμετρος, τόξο, κυκλικός δίσκος, επίκεντρη γωνία και το αντίστοιχο τόξο της, μέτρο τόξου, σχέση επίκεντρης και αντίστοιχου τόξου, εφαπτομένη κύκλου) ✓ Θέσεις σημείου ως προς κύκλο ✓ Θέσεις ευθείας ως προς κύκλο ✓ Απόστημα χορδής	**Παραδείγματα:** *Επαγωγικός συλλογισμός* • Να αποδείξετε ότι μία επίκεντρη γωνία σε κύκλο (O, R) είναι διπλάσια από κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο. • Γιατί κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή; • Γιατί κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι μικρότερη από 180°;	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.* **Παραδείγματα:** (α) Να αναφέρετε το Θεώρημα για τη σχέση που συνδέει την εγγεγραμμένη γωνία με την αντίστοιχη επίκεντρη. (β) Να αναφέρετε τη σχέση μεταξύ της γωνίας θ η οποία σχηματίζεται μεταξύ δύο χορδών και των αντίστοιχων τόξων α και β, όπως εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση στα πιο κάτω σχήματα. (γ) Αν στο $1^{\text{ο}}$ σχήμα το μέτρο του τόξου α είναι 80° και το μέτρο του τόξου β είναι 50°, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ.

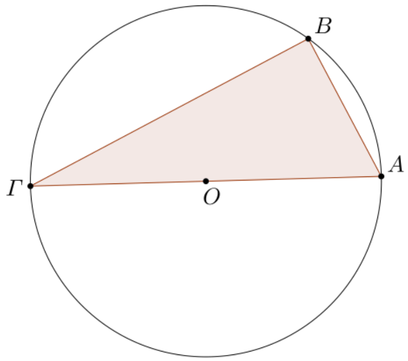
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Γ5.1) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

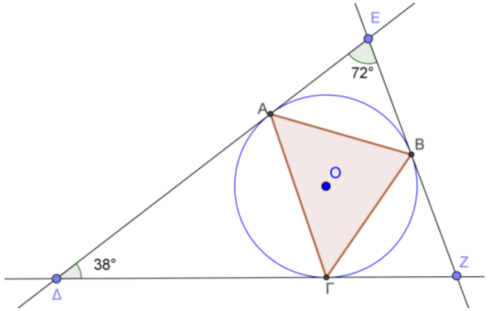
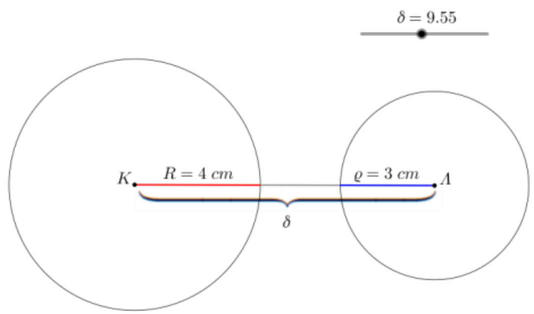
	Νέες Έννοιες ✓ Επαγωγική διαδικασία γενίκευσης		Σχήμα (1) Σχήμα (2) Σχήμα (3)  Σχήμα (4) Σχήμα (5)  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια «βοηθητική» γραμμή πρέπει να φέρουμε, ώστε να συνδέσουμε τη γωνία θ με τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα α και β; • Πώς μπορούμε μέσω του Σχήματος (1) να δούμε το Σχήμα (3) ως ειδική περίπτωσή του;
2. **Παραγωγικός συλλογισμός** (Γ5.2) Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.	2.1. Διερευνούν κατά πόσο ισχύουν γενικές σχέσεις (προτάσεις) σε ειδικές περιπτώσεις (συνθήκες) **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Βασικά θεωρήματα, προτάσεις από: ✓ Γωνίες σε κύκλο (εγγεγραμμένες - επίκεντρες) ✓ Θεώρημα χορδής και	**Παράδειγμα:** *Παραγωγικός συλλογισμός* • Στο πιο κάτω σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία (ε)περνά από το A. Να κατασκευάσετε την προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία (ε) αιτιολογώντας την απάντησή σας.	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και χρησιμοποιώ γενικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το μέτρο της γωνίας A είναι 70°. Να υπολογίσετε το μέτρο της απέναντι γωνίας Γ του τετραπλεύρου.

	εφαπτομένης ✓ Ομοιότητα τριγώνων **Νέες Έννοιες** ✓ Χρήση γενικών προτάσεων για σε επιμέρους προτάσεις.		 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι η σχέση της γωνίας A ως προς τον κύκλο; • Ποιες βοηθητικές γραμμές πρέπει να φέρουμε ώστε να αξιοποιήσουμε το είδος της γωνίας A με το σχετικό θεώρημα; • Ποια είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της Γ;
3. **Εγγεγραμμένη γωνία – Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης** (Γ5.7) Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος, κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής, κυκλικός τομέας, κυκλικό τμήμα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου,	3.1. Ορίζουν και αναγνωρίζουν εγγεγραμμένες γωνίες. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Μέτρο τόξου ✓ Τέμνουσες κύκλου **Νέες Έννοιες** ✓ Εγγεγραμμένη γωνία ✓ Μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας	**Παράδειγμα:** *Ορισμός εγγεγραμμένης γωνίας* • Να ονομάσετε δύο εγγεγραμμένες γωνίες, αναφέροντας σε κάθε περίπτωση το αντίστοιχο τόξο στο οποίο βαίνει. 	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.** *Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς, λαμβάνοντας υπόψη τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Ένας μαθητής ορίζει την εγγεγραμμένη γωνία ως εξής: «είναι η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου». Ο καθηγητής στη συνέχεια του κάνει τρία σχήματα για να υποδείξει στο μαθητή ότι κάτι έχει παραλείψει. Να δώσετε τον ορθό ορισμό.

σχετικές θέσεις δύο κύκλων, μέτρο τόξου και γωνίας, επίκεντρες γωνίες, εγγεγραμμένες γωνίες, γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη).			   *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Γιατί τα πιο πάνω σχήματα αποτελούν αντιπαραδείγματα, για να υποδείξουν την ατέλεια στον ορισμό; • Με ποιο τρόπο μπορούν να με οδηγήσουν στην ορθότητα της διατύπωσης του ορισμού;

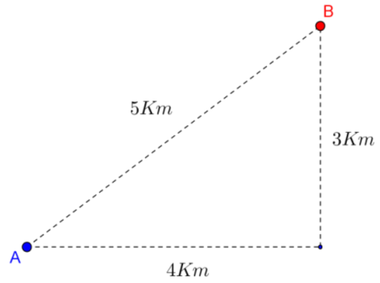
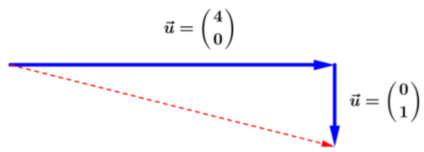
	3.2. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες εγγεγραμμένων γωνιών: • Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. • Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου. • Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. • Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους. • Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα ίσων κύκλων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία ✓ Μέτρο τόξου ✓ Ημικύκλιο **Νέες Έννοιες** ✓ Σχέση μέτρων εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας ✓ Σχέση μέτρου εγγεγραμμένης γωνίας και μέτρου αντίστοιχου τόξου ✓ Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο	**Παράδειγμα:** *Σχέση εγγεγραμμένης-επίκεντρης γωνίας* • Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε: (α) την τιμή του x (β) το μέτρο του τόξου $ΓΕΔ$ (γ) το μέτρο της γωνίας $ΓΕΔ$  **Παράδειγμα:** *Γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο* • Στο πιο κάτω σχήμα, η $ΑΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου (O, OA) και $\widehat{ΒΑΓ} = 3 \cdot \widehat{ΒΓΑ}$. (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$. (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $ΑΒ$ (του μικρότερου) 	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.* **Παράδειγμα:** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, ο κύκλος με διάμετρο $ΑΒ$ τέμνει την υποτείνουσα $ΒΓ$ στο σημείο $Μ$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο $Μ$ διέρχεται από το μέσο του $ΑΓ$. *Απαντώ στις ερωτήσεις* • Στο σχήμα που θα κατασκευάσετε ποια είναι η ορθή γωνία; • Πώς θα κατασκευάσουμε την ορθή γωνία σε σημείο που αποτελεί άκρο της διαμέτρου; • Τι πρέπει να επισημάνουμε όταν φέρουμε την εφαπτομένη στο $Μ$;

	✓ Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο		
	3.3. Διερευνούν τη σχέση ανάμεσα σε τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων ευθειών. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Παράλληλες ευθείες ✓ Σχέσεις με γωνίες που σχηματίζονται από Τρίτη ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες. **Νέες Έννοιες** ✓ Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων (ή του ίδιου κύκλου) είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα. ✓ Μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών περιέχονται ίσα τόξα.	**Παράδειγμα:** *Σχέση εγγεγραμμένων γωνιών - τόξα μεταξύ παράλληλων χορδών* • Στο πιο κάτω σχήμα, να φέρετε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Αν Δ είναι η τομή της παράλληλης ευθείας από το B και του κύκλου, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$. 	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ «φαίνεται» υπό γωνία 60° από το σημείο A. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν και άλλες πιθανές θέσεις σημείων από τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα να φαίνεται επίσης υπό γωνία 60°. *Απαντώ στις ερωτήσεις* • Που πρέπει να βρίσκονται τα ζητούμενα σημεία; • Ποια κατασκευή πρέπει να γίνει ώστε να βοηθήσει στην εύρεση σημείων τα οποία θα φαίνονται από τη συγκεκριμένη γωνία των 60°;
	3.4. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Χορδή κύκλου ✓ Εγγεγραμμένη γωνία ✓ Εφαπτόμενη κύκλου **Νέες Έννοιες** ✓ Γωνία που σχηματίζει μία χορδή ενός κύκλου με την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής αυτής	**Παράδειγμα:** *Γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη* • Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν γνωρίζουμε τις γωνίες $\hat{\Delta}=38^{\circ}$ και $E=72^{\circ}$ του τριγώνου ΔEZ, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.	**ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και ιδιότητες, για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.* **Παράδειγμα:** Στον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τις χορδές $B\Delta$ και ΓE παράλληλες στις χορδές $B\Delta$ και ΓE, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η χορδή ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του κύκλουυ στο σημείο A.

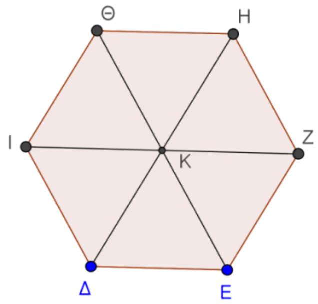
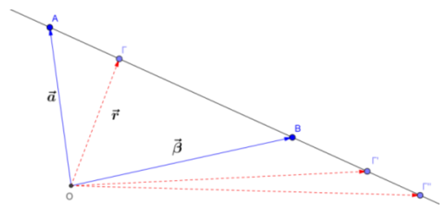
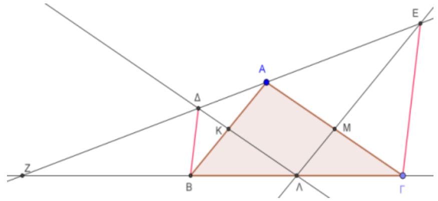
	✓ Σχέση γωνίας που σχηματίζει μία χορδή ενός κύκλου με την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής αυτής και κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο που αντιστοιχεί στη χορδή αυτή		*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες; • Ποιο κριτήριο χρησιμοποιώ για να αποδείξω ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες ;
4. **Σχετικές θέσεις δύο κύκλων** (Γ6.6) Διερευνούν, αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.	4.1. Διερευνούν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων με τη χρήση κατάλληλων εφαρμογιδίων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Απόσταση δύο σημείων **Νέες Έννοιες** ✓ Διάκεντρος ✓ Θέση δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $\mathrm{R} \geq \rho$ και $\delta = (\mathrm{K}\Lambda)$ ✓ Συνθήκες, ώστε δύο κύκλοι να τέμνονται, να εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά ή να είναι ξένοι εξωτερικά	**Παράδειγμα:** *Σχετικές θέσεις δύο κύκλων* • Στο πιο κάτω εφαρμογίδιο, να μεταβάλλετε το δρομέα «δ» και να αναφέρετε τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο με τις ακτίνες των δύο κύκλων, όταν οι δύο κύκλοι: (α) είναι ξένοι εξωτερικά (β) εφάπτονται εξωτερικά (γ) τέμνονται (δ) εφάπτονται εσωτερικά (ε) είναι ξένοι εσωτερικά 	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Στο εφαρμογίδιο *«ALykEn03_Thesis2Kyklon.ggb»* δίνονται δύο κύκλοι, τους οποίους μπορούμε να μεταβάλουμε, αλλάζοντας το μήκος της ακτίνας τους, αλλά και τη θέση τους αλλάζοντας το μήκος της διακέντρου τους. Να μετακινήσετε το δρομέα «d» για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, έτσι ώστε οι κύκλοι: i. να έχουν δύο κοινά σημεία ii. να έχουν ένα κοινό σημείο iii. να μην έχουν σημεία τομής Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτινών; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι παρατηρώ για τα αντίστοιχα μήκη των

			δύο ακτινών και της απόστασης των κέντρων των δύο κύκλων; • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο για να φθάσω σε γενίκευση; • Σε ποιο γενικό συμπέρασμα μπορώ να καταλήξω σε καθεμία από τις πιο πάνω περιπτώσεις και πώς μπορώ να το αποδείξω;
5. **Σχέσεις διακέντρου – ακτινών δύο κύκλων** (Γ6.12) Ανακαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ διακέντρου και ακτινών μεταξύ δύο κύκλων.	5.1. Βρίσκουν τη σχετική θέση δύο κύκλων εφαρμόζοντας τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο και τις ακτίνες των δύο κύκλων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Απόσταση δύο σημείων ✓ Ορισμός διακέντρου ✓ Θέση δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $R \geq \rho$ και $\delta = (K\Lambda)$ **Νέες Έννοιες** ✓ Θέση δύο κύκλων ((K, R) και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $R \geq \rho$ και $\delta = (K\Lambda)$) με βάση τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο με τη διαφορά ή το άθροισμα των δύο ακτινών των δύο κύκλων: ➢ $R - \rho < \delta < R + \rho$ ➢ $R + \rho = \delta$ ➢ $R - \rho = \delta$ ➢ $R + \rho < \delta$ ➢ $R - \rho > \delta$	**Παράδειγμα:** *Απόδειξη της συνθήκης που ισχύει, όταν δύο κύκλοι τέμνονται* • Αν δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται, να αποδείξετε ότι ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου $\delta = K\Lambda$. **Παράδειγμα:** *Σχετική θέση δύο κύκλων* • Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις: (α) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 10cm$ (β) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 13cm$ (γ) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 2cm$ (δ) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 1cm$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.* **Παραδείγματα:** (α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(K, 12cm)$ και $(\Lambda, 20cm)$, με $K\Lambda = 25cm$, τέμνονται. (β) Να ορίσετε το μήκος της ακτίνας ρ ενός κύκλου με κέντρο το σημείο N και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $N\Lambda$, ώστε οι κύκλοι (N, ρ) και $(\Lambda, 20\ cm)$ να μην τέμνονται (να διακρίνεται όλες τις περιπτώσεις). *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πότε δύο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) τέμνονται; • Ποια γενική συνθήκη χρησιμοποιώ, για να αποδείξω ότι δύο συγκεκριμένοι κύκλοι τέμνονται ή όχι;

6. **Μονόμετρα – διανυσματικά μεγέθη, έννοια διανύσματος, πράξεις διανυσμάτων** (Γ5.16) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του διανύσματος (ορισμός διανύσματος, συντεταγμένες διανύσματος, πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα).	6.1 Ορίζουν την έννοια του διανύσματος και των χαρακτηριστικών στοιχείων του και την εφαρμόζουν σε προβλήματα **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου **Νέες Έννοιες** ✓ Διάνυσμα-συμβολισμός διανυσμάτων ✓ Χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος: ➢ Διεύθυνση ➢ Φορά ➢ Μέτρο	**Παράδειγμα:** *Ορισμός διανύσματος-χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος* • Να αναφέρετε ποια από τα παρακάτω είναι διανύσματα, αιτιολογώντας την απάντησή σας: (α) $1\ km$ βόρεια από την πλατεία Λευκωσίας (β) $20m/s^2$ (γ) $36cm^2$ (δ) Βορειοδυτικά με $60°$ γωνία σε σχέση με την κατεύθυνση του βορρά.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.* **Παράδειγμα:** Να δώσετε ένα μονόμετρο και ένα διανυσματικό μέγεθος. Να εξηγήσετε πώς αντιλαμβάνεστε τη διαφορά των δύο μεγεθών. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιος είναι ο ορισμός των διανυσματικών και μονόμετρων μεγεθών. Ποια είναι η «ειδοποιός διαφορά»; • Ποιο παράδειγμα μπορώ να δώσω, ώστε να τονίζεται η διαφορά; Γιατί τα μεγέθη «Απόσταση» και «Μετατόπιση» τονίζουν αυτή τη διαφορά;
	6.2 Διακρίνουν μεγέθη σε μονόμετρα και διανυσματικά **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου ✓ Ορισμός και χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος **Νέες Έννοιες** ✓ Μονόμετρο μέγεθος	**Παραδείγματα:** *Μονόμετρο- διανυσματικό μέγεθος* • Για τον προσδιορισμό του σημείου B σε σχέση με το σημείο A, ο Ανδρέας και ο Βασίλης δήλωσαν τα πιο κάτω: *Ανδρέας*: Το σημείο B απέχει $5Km$ από το σημείο A. *Βασίλης:* Από το σημείο A να προχωρήσεις $4\ Km$ «δεξιά» και μετά $3\ Km$ προς τα «πάνω».	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα για να ερμηνεύσω ένα πραγματικό πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.* **Παράδειγμα:** Ένα πλοιάριο πλέει σε λίμνη με σταθερή ταχύτητα $4m/s$ με κατεύθυνση από Δυτικά προς Ανατολικά. Στην περιοχή φυσάει άνεμος, ο οποίος δημιουργεί ρεύμα στη λίμνη με ταχύτητα $1m/s$ με Νότια κατεύθυνση. (α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πλοιαρίου και να αιτιολογήσετε πώς ο άνεμος την επηρεάζει, αναφέροντας

	✓ Διανυσματικό μέγεθος	 Ποιο από τα δύο παιδιά έδωσε καλύτερη περιγραφή, ώστε να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου B από το σημείο A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. • Η θερμοκρασία στις 20 Ιουνίου ήταν $38^{\circ}C$. Ταξίδευα με το ποδήλατό μου με σταθερή ταχύτητα 38 km/h από Λευκωσία προς Λάρνακα. Πώς σχολιάζετε τον αριθμό 38 στις πιο πάνω περιπτώσεις, αναφορικά με τα μεγέθη «Θερμοκρασία» και «Ταχύτητα»;	το μέτρο της και την ακριβή της κατεύθυνσης. (β) Πόσα μέτρα νότια από το σημείο που έχει ξεκινήσει θα βρίσκεται η βάρκα μετά από 2 λεπτά; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια στρατηγική χρησιμοποιώ, για να λύσω το πρόβλημα; • Γιατί η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος και πώς η πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων μπορεί να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος; • Πώς με βοηθά το πιο κάτω σχήμα στην επίλυση του προβλήματος; 
7. **Μέτρο διανύσματος, σχέσεις διανυσμάτων** (Γ6.11) Ορίζουν, αναπαριστούν και εφαρμόζουν ιδιότητες των διανυσμάτων, βρίσκουν το μέτρο διανύσματος, κάνουν πράξεις με διανύσματα (άθροισμα, διαφορά διανυσμάτων, γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα) και εξετάζουν τη συνθήκη	7.1 Υπολογίζουν το μέτρο διανύσματος και να εκτελούν πράξεις με διανύσματα (πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα). **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός Μονόμετρου και διανυσματικού μεγέθους ✓ Ορισμός διανύσματος	**Παράδειγμα:** *Μέτρο διανύσματος* • Να υπολογίσετε το μέτρο των πιο κάτω διανυσμάτων: $\vec{\alpha} = \binom{3}{4}, \vec{\beta} = \binom{1}{0}, \vec{\gamma} = \binom{0}{-1}, \vec{\delta} = \binom{-2}{4}$ **Παράδειγμα:** *Μηδενικό διάνυσμα* • Να βρείτε τη σχέση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, όπου: $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{K\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda M} + \overrightarrow{MK}$ και $\vec{\gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.* **Παράδειγμα:** Αν E και Z είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι τα ΔE και BZ χωρίζουν τη διαγώνιο $A\Gamma$ σε τρία ίσα μέρη. **Υπόδειξη:** Με αρχή το σημείο A ορίζουμε

παραλληλίας διανυσμάτων.	**Νέες Έννοιες** ✓ Συντεταγμένες $\binom{x}{y}$ του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ✓ Υπολογισμός και συμβολισμός του μέτρου του $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ✓ Μέτρο διανύσματος ✓ Ορισμός διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Άθροισμα 2 διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ ✓ Πολλαπλασιασμός αριθμού λ ($\lambda \neq 0$) με ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ✓ Συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ✓ Συνθήκη για να είναι συνευθειακά 3 σημεία ✓ Συντεταγμένες κέντρου βάρους του τριγώνου	**Παραδείγματα:** *Πράξεις διανυσμάτων (άθροισμα, διαφορά, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα)* • Να σχεδιάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με το: (α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}$ (β) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ΓΔ}$ (γ) $\overrightarrow{AΔ}-\overrightarrow{ΓB}$ (δ) $\overrightarrow{AΔ}-\overrightarrow{BΓ}$ • Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$, το M είναι το μέσο της $ΒΓ$. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ και $\overrightarrow{AΓ}=\vec{y}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\vec{x}$ και $\vec{y}$.	$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ και $\overrightarrow{AΔ}=\vec{y}$. Γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AH}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους και τους χρησιμοποιούμε (μέσω της ισότητας δύο διανυσμάτων) για να βρούμε τη σχέση του AH με το $AΓ$. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;
	7.2 Εξετάζουν κατά πόσο δύο διανύσματα είναι ίσα, ομόρροπα, αντίρροπα, αντίθετα ή παράλληλα. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός διανύσματος ✓ Μέτρο διανύσματος **Νέες Έννοιες** ✓ Σχέσεις δύο διανυσμάτων: ➢ Παράλληλα ή συγγραμμικά μη-μηδενικά διανύσματα ➢ Ομόρροπα και αντίρροπα	**Παράδειγμα:** *Παράλληλα διανύσματα* • Να βρείτε τη σχέση των πιο κάτω διανυσμάτων και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: $\vec{\alpha}=2\vec{u}$, $\vec{\beta}=-3\vec{u}$, $\vec{\gamma}=\frac{1}{2}\vec{u}$ και $\vec{\delta}=100\vec{u}$ **Παράδειγμα:** *Ίσα - αντίθετα διανύσματα* • Δίνεται το εξάγωνο $ΔΕΖΗΘΙ$, το οποίο έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες. Να αναφέρετε ένα ίσο και ένα	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Αν τα σημεία A και B έχουν διανυσματικές ακτίνες (ως προς ένα σταθερό σημείο O του επιπέδου τους) $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, αντίστοιχα, να εξηγήσετε γιατί κάθε σημείο $Γ$ ($Γ', Γ'', \ldots$) που ανήκει στην ευθεία AB έχει διανυσματική ακτίνα $\vec{r}=\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}$, με $\lambda+\mu=1$.

	διανύσματα ➢ Ίσα διανύσματα ➢ Αντίθετα διανύσματα	αντίθετο διάνυσμα προς το διάνυσμα: (α) $\overrightarrow{ΘΗ}$ (β) $\overrightarrow{ΗΖ}$ (γ) $\overrightarrow{ΚΔ}$ 	 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς γράφεται το διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΓ}$ ως άθροισμα δύο διανυσμάτων; • Ποια η σχέση του «μεταβλητού» διανύσματος $\overrightarrow{ΑΓ}$ με το «σταθερό» διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$;
8. **Όμοια σχήματα** (Γ4.8) Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέσεις ισότητας και ομοιότητας μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και ελέγχουν τις υποθέσεις τους, χρησιμοποιώντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.	8.1 Χρησιμοποιούν παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό, για να εντοπίζουν όμοια γεωμετρικά σχήματα. **Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. **Νέες Έννοιες** ✓ Όμοια πολύγωνα	**Παράδειγμα:** *Όμοια πολύγωνα* • Να εξηγήσετε γιατί: (α) δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους (β) δύο τετράγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους (γ) ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν είναι πάντοτε όμοια. (δ) ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος δεν είναι πάντοτε όμοια. (ε) δύο ίσα τρίγωνα είναι και όμοια (στ) δύο όμοια σχήματα δεν είναι κατά ανάγκην ίσα. (ζ) δύο τρίγωνα όμοια προς τρίτο είναι και μεταξύ τους όμοια	**ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.* **Παράδειγμα:** Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $Κ, Λ$ και $Μ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΒΓ$ και $ΓΑ$, αντίστοιχα. Από το $Α$ φέρουμε τυχαία ευθεία $(ε)$, η οποία τέμνει τις ευθείες $ΛΚ$ και $ΛΜ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η $ΒΔ$ είναι παράλληλη προς την $ΓΕ$.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιά ζεύγη παράλληλων πλευρών έχω;

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>

- Από ποια δεδομένα εξάγεται η παραλληλία συγκεκριμένων ευθειών, ώστε να μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Θαλή;
- Η ερώτηση στο πρόβλημα είναι απόδειξη παράλληλων πλευρών. Σε τι αναφέρεται το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή, ώστε να μου επιτρέπει να το εφαρμόσω;

</td>
</tr>
<tr>
<td>

9. **Θεώρημα Θαλή** (Γ5.12) Ορίζουν το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό, διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε $\boldsymbol{\nu}$ ίσα μέρη, βρίσκουν τον λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων, ορίζουν την αναλογία ευθύγραμμων τμημάτων, διαιρούν ευθύγραμμα τμήματα εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δεδομένο λόγο, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου.

</td>
<td>

9.1 Διατυπώνουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του και τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλήματος.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών
- ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών
- ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων

Νέες Έννοιες

- ✓ Θεώρημα Θαλή
- ✓ Αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή

</td>
<td>

Παράδειγμα:

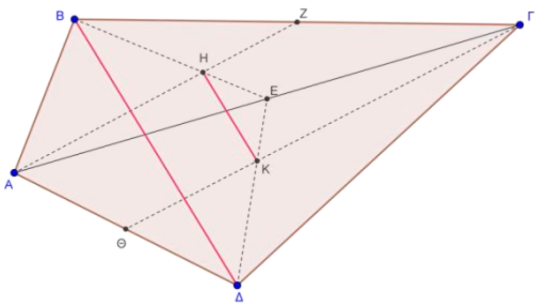
Εφαρμογή Θεωρήματος Θαλή

- Σας δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ.Να εξηγήσετε πώς μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τέταρτο τμήμα x έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

Παράδειγμα:

Εφαρμογή αντίστροφου του Θεωρήματος Θαλή

- Στο κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, τα βαρύκεντρα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΔΓ$ είναι τα σημεία $Η$ και $Κ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΗΚ \parallel ΒΔ$.

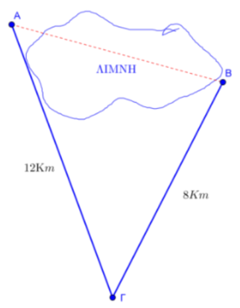


</td>
<td>

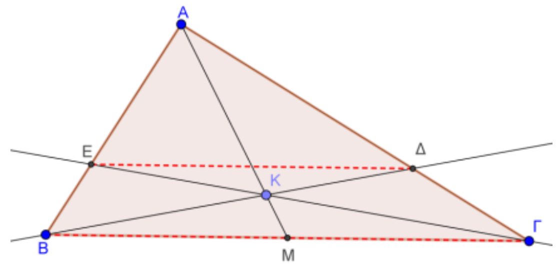
ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

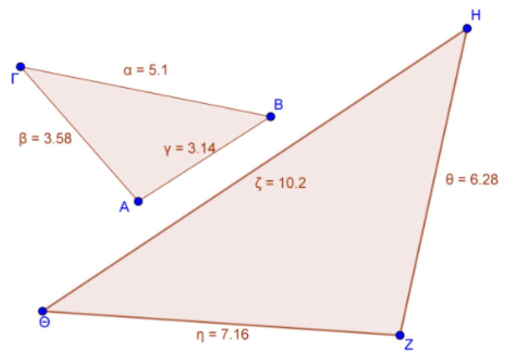
Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.

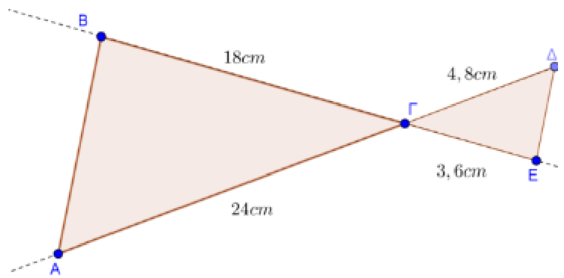
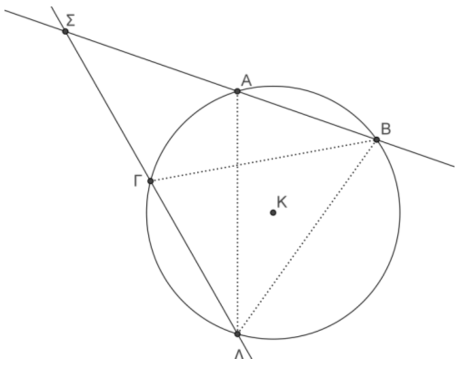
Παράδειγμα: Τα σημεία $Α$ και $Β$ είναι απρόσιτα λόγω της λίμνης που υπάρχει μεταξύ τους. Είναι γνωστές οι αποστάσεις $ΓΑ = 12\ Km$ και $ΓΒ = 8Km$.Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι μπορεί να υπολογίσει την απόσταση $ΑΒ$, αφού γνωρίζει για ένα σημείο $Δ$ που βρίσκεται πάνω στην $ΓΑ$ έτσι, ώστε $ΓΔ = 3Km$. Να γράψετε τον τρόπο σκέψης του μαθητή για τον υπολογισμό του μήκους $ΑΒ$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

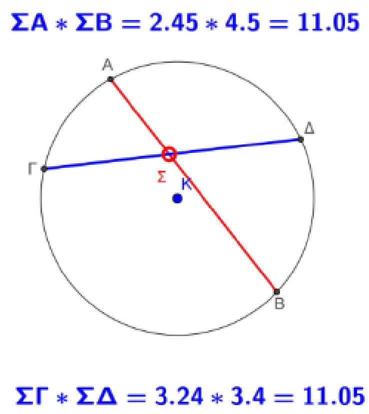


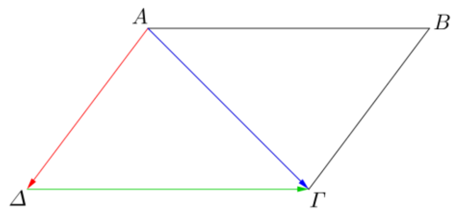
</td>
</tr>
</table>

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορεί το Θεώρημα Θαλή να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος; • Ποιες βοηθητικές γραμμές πρέπει να φέρω ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα;
10.**Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων** (Γ5.13) Ορίζουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων την έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων, αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων και του λόγου περιμέτρων και εμβαδών όμοιων σχημάτων.	10.1 Εφαρμόζουν την έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων. ✓ Θεώρημα Θαλή **Νέες Έννοιες** ✓ Ομόλογες κορυφές ✓ Ομόλογες πλευρές ✓ Λόγοι ομοιότητας μεταξύ δύο σχημάτων (ομόλογων πλευρών, περιμέτρων, εμβαδών)	**Παράδειγμα:** *Όμοια πολύγωνα - Εφαρμογή ιδιοτήτων* • Δύο όμοια πολύγωνα Π_1 και Π_2 έχουν εμβαδά $72\ cm^2$ και $128\ cm^2$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε: (α) το λόγο των περιμέτρων τους (β) το μήκος της ομόλογης πλευράς του μικρότερου πολυγώνου, όταν η αντίστοιχη της πλευρά έχει μήκος $12\ cm$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.* **Παράδειγμα:** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η AM είναι διάμεσος και το K τυχαίο σημείο πάνω στην AM. Αν η BK τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ και η ΓK την AB στο E, να αποδείξετε ότι η ΔE είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορώ να αξιοποιήσω το μέσο M; Αν προεκτείνω το KM προς το M ώστε $M\Lambda = KM$, πώς μπορώ να έχω παράλληλες ευθείες;

			• Όταν έχω παράλληλες ευθείες, ποιο Θεώρημα μπορώ να εφαρμόσω; • Ποια αναλογία μηκών ευθύγραμμων τμημάτων σχηματίζω, έτσι ώστε να ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή; • Ποιο εργαλείο μου δίνει η εφαρμογή του αντίστροφου του Θεωρήματος Θαλή;
	10.2 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων. ✓ Θεώρημα Θαλή ✓ λόγοι ομοιότητας **Νέες Έννοιες** ✓ Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων ✓ (1^o κριτήριο) ως προς τις γωνίες τους ✓ (2^o κριτήριο) ως προς 2 από τις πλευρές τους και τις περιεχόμενες τους γωνίες ✓ (3^o κριτήριο) ως προς τις πλευρές τους	**Παραδείγματα:** *Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων* • Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\hat{A} = 90^\circ)$, να φέρετε το ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι στο σχήμα υπάρχουν τρία όμοια τρίγωνα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. • Να αιτιολογήσετε γιατί τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους και να γράψετε: (α) τα ζεύγη ίσων γωνιών (β) τον λόγο των εμβαδών τους  • Στο πιο κάτω σχήμα: (α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια (β) να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Delta E$	**ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.* **Παράδειγμα:** Από σημείο A που βρίσκεται εκτός κύκλου (K, R) φέρουμε στον κύκλο τέμνουσα $AB\Gamma$ και εφαπτομένη $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma$. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Σε ποια βασική διαδικασία με οδηγεί η ζητούμενη μετρική σχέση; • Ποια τρίγωνα πρέπει να επιλεγούν για να συγκριθούν; • Ποιο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί;

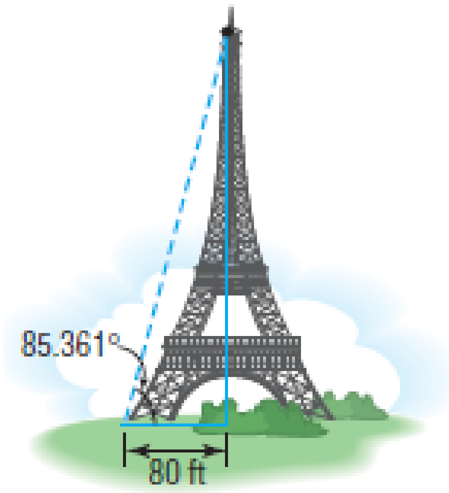
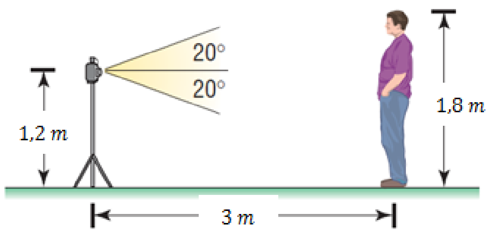
		(γ) αν $ΔE = 3\ cm$, να υπολογίσετε το μήκος του AB  	
11.**Μετρικές σχέσεις στον κύκλο** (Γ6.8) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις μετρικές σχέσεις σε κύκλο (τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο, την ιδιότητα της τέμνουσας ενός κύκλου, τη διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά με δεδομένο λόγο, το χρυσό λόγο, τα συζυγή αρμονικά σημεία και τα θεωρήματα διχοτόμων).	11.1 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν μετρικές σχέσεις στον κύκλο στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Όμοια τρίγωνα ✓ Θεώρημα Θαλή **Νέες Έννοιες** ✓ Δύναμη του σημείου $Σ$, ως προς κύκλο (K, R) ✓ Συνθήκη για θέση σημείου $Σ$ ως προς κύκλο (K, R). (α) Το σημείο βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (β) Το σημείο βρίσκεται πάνω στον κύκλο. (γ) Το σημείο βρίσκεται μέσα στον κύκλο.	**Παραδείγματα:** *Μετρικές σχέσεις στον κύκλο* • Δίνεται κύκλος (K, R) και ένα σημείο $Σ$ έξω από τον κύκλο. Φέρουμε τυχαία τέμνουσα $ΣAB$. Τι καταλαβαίνετε όταν λέμε το γινόμενο $(ΣA) \cdot (ΣB)$ είναι σταθερό; • Στο πιο κάτω σχήμα: (α) να βρείτε δύο ζεύγη όμοιων τριγώνων που να έχουν κοινή κορυφή το σημείο $Σ$ (β) να αποδείξετε ότι $(ΣA) \cdot (ΣB) = (ΣΓ) \cdot (ΣΔ)$ (γ) να αποδείξετε ότι $(ΣA) \cdot (ΣB) = ΣK^2 - R^2$  	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Στο εφαρμογίδιο *«A_Lyk_Dynamisimeiou.ggb»* μας δίνεται η δυνατότητα να μετακινούμε το σημείο $Σ$ και σε κάθε θέση να έχουμε υπολογισμένα τα γινόμενα $ΣA \cdot ΣB$ και $ΣΓ \cdot ΣΔ$. (α) Τι παρατηρώ για τη σχέση των δύο γινομένων; (β) Τι παρατηρώ, όταν το σημείο $Σ$ μεταφερθεί έξω από τον κύκλο; (γ) Τι συμβαίνει, όταν το σημείο $Σ$ ανήκει στον κύκλο;

		• Δίνεται κύκλος (K, R) και ένα τυχαίο σημείο Σ στο επίπεδο του κύκλου. Τι καταλαβαίνετε: (α) με τον συμβολισμό $\Delta_K(\Sigma)$; (β) για τη θέση του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (K, R) όταν $\Delta_K(\Sigma) > 0$ ή $\Delta_K(\Sigma) < 0$ ή $\Delta_K(\Sigma) = 0$; Ποιο είναι το πρόσημο της παράστασης $\Sigma K^2 - R^2$ σε κάθε περίπτωση;	 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες πληροφορίες μπορώ να πάρω από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο; • Τι μου προσφέρει περισσότερο το εφαρμογίδιο από ένα σχήμα σε συνηθισμένο πίνακα; • Ποια εικασία μπορώ να κάνω; • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο στην απόδειξη της εικασίας μου

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΤΡΗΣΗ)			
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ **ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ** **ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ** **ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ** **ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Εμβαδόν τριγώνου** (Μ6.2**) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία, την αναλυτική γεωμετρία και τον διανυσματικό λογισμό.	1.1 Επιλύουν προβλήματα εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο, χρησιμοποιώντας τύπους από το διανυσματικό λογισμό. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου ✓ Ορισμός-Μέτρο διανύσματος ✓ Σχέσεις διανυσμάτων **Νέες Έννοιες** ✓ Συνδυασμός προηγούμενων γνώσεων για υπολογισμό εμβαδού	**Παράδειγμα:** *Εμβαδόν Τριγώνου* • Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου $ΑΒΓ$, με $\overrightarrow{AB}=\vec{\gamma}, \overrightarrow{AΓ}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{BΓ}=\vec{\alpha}$, όταν: (α) $A(0,6), B(0,0)$ και $Γ(3,0)$ (β) $A(-1,3), B(1,4)$ και $Γ(4,-2)$ *Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $E_{ABΓ}=\frac{1}{2}\lvert\vec{\alpha}\rvert\lvert\vec{\beta}\rvert ημΓ$	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Ο Νικόλας, παρατηρώντας το σχήμα αυτό, διατυπώνει τον ισχυρισμό: $\lvert\overrightarrow{AΓ}\rvert=\lvert\overrightarrow{AΔ}\rvert+\lvert\overrightarrow{ΔΓ}\rvert$ Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός του είναι αληθής, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. 

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Μ6.2) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορώ να αποδείξω ότι ο ισχυρισμός του Νικόλα είναι λανθασμένος; • Ποιο αντιπαράδειγμα μπορώ να δώσω;
2. **Πράξεις διανυσμάτων, μέτρο διανύσματος, μέτρο γωνίας δύο διανυσμάτων** (Μ6.4) Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων, το γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα, το μέτρο διανύσματος όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων του, τη γωνία δύο διανυσμάτων, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων και σημείου από ευθεία και τη γωνία δύο ευθειών.	2.1 Εκτελούν πράξεις με διανύσματα. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός διανύσματος **Νέες έννοιες** ✓ Ορισμός και άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Συνισταμένη των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}, \vec{\beta}$ ✓ Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το $\vec{\alpha}$ ✓ Πολλαπλασιασμός αριθμού λ ($\lambda \neq 0$) με ένα μη-μηδενικό διάνυσμα	**Παραδείγματα:** *Πράξεις με Διανύσματα* • Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \vec{\beta}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: (α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ (β) $5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+\frac{1}{5}\vec{\gamma}$ • Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Δ$ τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά του $ΒΓ$. Να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με: (α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}$ (β) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Delta}$ (γ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$ (δ) $\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma A}$	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τις σχέσεις διανυσμάτων, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Ένα έντομο τοποθετείται πάνω σε ένα αριθμημένο τετραγωνικό χαρτί στο σημείο με συντεταγμένες $(3, 2)$. Το έντομο αρχίζει να κινείται στο χαρτί 1 μονάδα ανά λεπτό στην αρνητική x −κατεύθυνση και 2 μονάδες ανά λεπτό στην αρνητική y −κατεύθυνση. (α) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του εντόμου σε μονάδες ανά λεπτό; (β) Πού θα βρίσκεται το έντομο μετά την παρέλευση 3 λεπτών από τη στιγμή που αυτό άρχισε να κινείται; (γ) Πόσα λεπτά θα χρειαστεί το έντομο για να φτάσει στο σημείο με συντεταγμένες $(-4, -12)$; (δ) Να εξετάσετε κατά πόσο το έντομο θα περάσει από το σημείο με συντεταγμένες $(-13, -27)$, αν αυτό συνεχίσει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς σχετίζεται η κίνηση του εντόμου με το μέτρο της ταχύτητάς του;
	2.2 Υπολογίζουν το μέτρο διανύσματος, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός διανύσματος **Νέες έννοιες** ✓ Συντεταγμένες διανύσματος ✓ Μέτρο διανύσματος	**Παράδειγμα:** *Μέτρο Διανύσματος* • Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ και $\vec{\beta}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.	

			• Ποιες έννοιες που σχετίζονται με τα διανύσματα είναι δυνατό να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση; • Θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω διαφορετική διαδικασία (π.χ. σχήμα) για να λύσω την άσκηση; Γιατί;
3. **Ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών** (Μ6.1) Επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρι-κών αριθμών.	3.1 Εφαρμόζουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνιάς **Νέες Έννοιες** ✓ Γωνία σε κανονική θέση, ✓ Τόξο ενός ακτινίου ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση ($ημθ, συνθ, εφθ, σφθ$).	**Παράδειγμα:** *Επίλυση Προβλήματος* • Να βρείτε ποιο ήταν το ύψος του πύργου του Άιφελ πριν από την τοποθέτηση της τηλεοπτικής κεραίας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της πιο κάτω εικόνας.  	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Μια φωτογραφική κάμερα είναι τοποθετημένη σε ένα τρίποδα ύψους $1{,}2\ m$. Ο τρίποδας βρίσκεται τοποθετημένος $3\ m$ μακριά από τον Γιώργο, ο οποίος έχει ύψος $1{,}8\ m$. Αν η κάμερα «καλύπτει» μια «περιοχή» $40°$, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα, να εξετάσετε κατά πόσο τα πόδια και το κεφάλι του Γιώργου θα είναι ορατά από τον φακό της κάμερας. Αν όχι, να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που θα πρέπει να μετακινηθεί η κάμερα προς τα αριστερά, για να το πετύχουμε αυτό. 

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;

<table>
<tr><td colspan="4">ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)</td></tr>
<tr><td colspan="4">ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</td></tr>
<tr><td>ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</td><td colspan="3">ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td rowspan="2">Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td colspan="2">Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης</td></tr>
<tr><td>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</td><td>Μαθηματικές Πρακτικές</td></tr>
<tr><td>1. Ιδιότητες μέσης τιμής (ΣΠ5.4**) Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή, εύρος, τυπική απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού).</td><td>1.1 Αποδεικνύουν βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτές.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Μεταβλητή
✓ Ποιοτική και ποσοτική μεταβλητή
✓ Υπολογισμός των βασικών μέτρων θέσης: Μέση Τιμή, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή
Νέες Έννοιες
✓ Απόδειξη βασικών ιδιοτήτων της μέσης τιμής</td><td>Παράδειγμα:
Ιδιότητες μέσης τιμής
• Η μέση τιμή των χρημάτων μεταξύ τεσσάρων αδελφών είναι €24. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των χρημάτων τους, αν:
(α) ο πατέρας δώσει στον καθένα ακόμα €10
(β) αγοράσουν από μία σοκολάτα που στοιχίζει €4
(γ) την επόμενη μέρα διαπιστώσει το κάθε παιδί ότι κρατά ένα ευρώ περισσότερο από τα μισά χρήματα που είχε την προηγούμενη μέρα</td><td>ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων
Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.
Παράδειγμα: Ένα παιδί διατυπώνει τους πιο κάτω ισχυρισμούς. Να αποφασίσετε για την ορθότητά τους ή μη. Να αποδείξετε την ορθότητά τους, όταν ο ισχυρισμός είναι αληθής.
(α) Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής X προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) έναν σταθερό αριθμό k, τότε η μέση τιμή αυξάνεται (ή ελαττώνεται) κατά τη σταθερή τιμή k.
(β) Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής X είναι ίσες μεταξύ τους, τότε η μέση τιμή των τιμών ισούται με τις τιμές.
(γ) Το εύρος είναι ένα αξιόπιστο μέτρο διασποράς.</td></tr>
</table>

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. ΣΠ5.4) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Πώς μπορώ να αποδείξω ότι οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί είναι ορθοί ενώ ο τρίτος όχι;
• Ποιο αντιπαράδειγμα μπορώ να δώσω για να στηρίξω ότι ο (γ) ισχυρισμός είναι λανθασμένος;</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Σταθμισμένος μέσος όρος (ΣΠ5.5)
Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.</td>
<td>2.1 Ορίζουν και υπολογίζουν τον σταθμισμένο Μέσο Όρο.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Μεταβλητή
✓ Ποιοτική και ποσοτική μεταβλητή
✓ Υπολογισμός των βασικών μέτρων θέσης: Μέση Τιμή, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή
Νέες Έννοιες
✓ Συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας)
✓ Ορισμός σταθμισμένου μέσου (weighted average)
✓ Τύπος για υπολογισμό σταθμισμένου μέσου
Σημείωση
✓ Ο απλός Μέσος Όρος των τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου όρου, όταν $w_1 = w_2 = \ldots w_\nu = 1$.</td>
<td>Παράδειγμα:
Σταθμισμένος μέσος όρος
• Το μάθημα της Στατιστικής στο α’ εξάμηνο αξιολογείται με βάση την παρουσία στο μάθημα (σύνολο παρουσιών 20), τον βαθμό δύο ενδιάμεσων εξετάσεων και την τελική εξέταση (βαθμολογία από το 100), ,με τη βαρύτητα που φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

<table>
<tr><th></th><th>Ποσοστό βαθμολογίας</th></tr>
<tr><td>Παρουσία</td><td>10%</td></tr>
<tr><td>1η ενδιάμεση</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>2η ενδιάμεση</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>Τελική εξέταση</td><td>40%</td></tr>
</table>

Να υπολογίσετε τον βαθμό δύο φοιτητών A και B, σύμφωνα με τις πιο κάτω επιδόσεις τους.</td>
<td>ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη
Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τις ιδιότητες της μέσης τιμής, για να κατανοήσω προβλήματα.
Παράδειγμα: Μια μαθήτρια αγόρασε 10 βιβλία που κόστιζαν χωρίς ΦΠΑ:
$16,10,7,19,22,7,19,28,10,13$
(α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της αξίας των 10 βιβλίων.
(β) Πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις στο (α) ερώτημα, αν προσθέσουμε και το ΦΠΑ που είναι 19%;
(γ) Αν η μαθήτρια πληρώσει 20 σεντ (χωρίς ΦΠΑ) για ντύσιμο του κάθε βιβλίου, πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις στο (β) ερώτημα;

Απαντώ στην ερώτηση:
• Ποιες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής μπορώ να χρησιμοποιήσω, ώστε να υπολογίσω τη νέα μέση τιμή στα ερωτήματα (β) και (γ);</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Φοιτητής</td></tr>
<tr><td></td><td>Α</td><td>Β</td></tr>
<tr><td>Παρουσία</td><td>20/20</td><td>16/20</td></tr>
<tr><td>1η ενδιάμεση</td><td>80%</td><td>70%</td></tr>
<tr><td>2η ενδιάμεση</td><td>90%</td><td>95%</td></tr>
<tr><td>Τελική εξέταση</td><td>82%</td><td>90%</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3. Μέτρα διασποράς (ΣΠ6.3) Υπολογίζουν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής διακριτών μεταβλητών (μη ομαδοποιημένων) και συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα (με ή χωρίς τη χρήση λογισμικού).</td>
<td>3.1 Υπολογίζουν και ερμηνεύουν τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας: εύρος ν τιμών, διασπορά ή διακύμανση ν τιμών και συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Μέγιστη και ελάχιστη τιμή μεταβλητής
✓ Μέτρα θέσης (μέση τιμή)
Νέες Έννοιες
✓ Ερμηνεία μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας διακριτών μη ομαδοποιημένων μεταβλητών που παρουσιάζονται διαγραμματικά/γραφικά:
➢ Διακύμανση ή διασπορά ν τιμών
➢ Εύρος τιμών
✓ Υπολογισμός μέτρων διασποράς:
➢ Διακύμανση (s^2)</td>
<td>Παράδειγμα:
Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας
• Τι εκφράζουν τα μέτρα διασποράς και ποια είναι τα σπουδαιότερα από αυτά;

Παράδειγμα:
Εύρος τιμών
• Πώς ορίζεται το εύρος τιμών και ποιο είναι κατά τη γνώμη σας το μειονέκτημά του ως μέτρο διασποράς;
• Ποιο είναι το εύρος τιμών στους πιο κάτω βαθμούς ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών;
$12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14, 15, 15, 19, 12, 8, 19, 9$

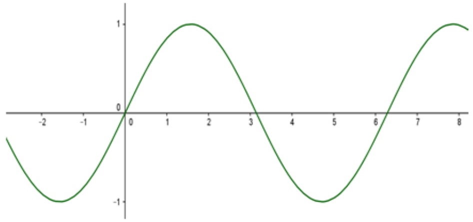
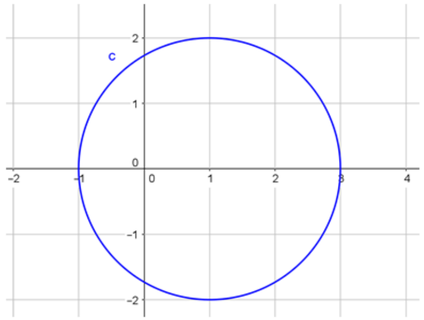
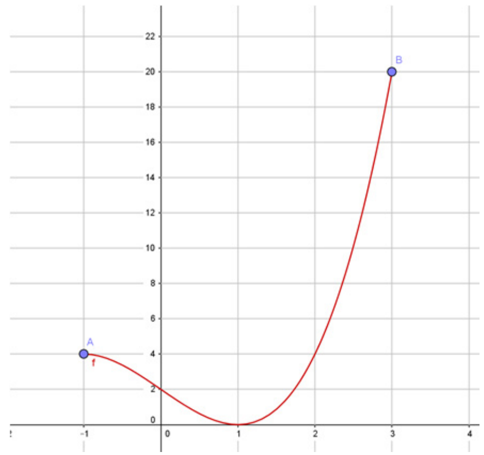
Παράδειγμα:
Διακύμανση – Τυπική απόκλιση
• (α) Πώς ορίζεται η διακύμανση και πώς η τυπική απόκλιση σε ένα σύνολο τιμών;
(β) Ποιο μέτρο διασποράς πλεονεκτεί έναντι του άλλου και γιατί;
(γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των βαθμών ενός διαγωνίσματος, όπως</td>
<td>ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών
Οργανώνω την έννοια της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης και τις σχέσεις μεταξύ τους, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.
Παράδειγμα: Να δείξετε ότι αν από όλες τις τιμές $0,4,8,12,16,20,24$ αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, τότε οι τιμές που θα προκύψουν θα έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά ίση με 1.

Απαντώ στην ερώτηση:
• Ποιες μαθηματικές ιδέες-ιδιότητες που έχω μάθει είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;
ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος
Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.
Παράδειγμα: (α) Αν δοθούν ν τιμές $x_1, x_2, \dots x_\nu$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_\nu - x)^2$</td>
</tr>
</table>

	$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$ ➢ Τυπική απόκλιση (s) $s = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}}.$ ➢ Εύρος τιμών (R) $R = x_{max} - x_{min}$ ➢ Συντελεστής μεταβλητότητας (CV) $CV = \frac{s}{\lvert\bar{x}\rvert} = \frac{τυπική\ απόκλιση}{μέση\ τιμή}$ **Παρατηρήσεις** ✓ Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό. ✓ Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος από το 10%, οι τιμές παρουσιάζουν ομοιογένεια.	φαίνονται πιο κάτω: $12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14$ $15, 15, 19, 12, 8, 19, 9$ • Οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις σε δύο διαφορετικά τμήματα A και B για το ίδιο διαγώνισμα ήταν οι εξής: <table><tr><th></th><th>ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ</th><th>ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ</th></tr><tr><td>ΤΜΗΜΑ Α1</td><td>16</td><td>1,8</td></tr><tr><td>ΤΜΗΜΑ Α2</td><td>16</td><td>4,8</td></tr></table>Να συγκρίνετε τους βαθμούς των δύο τμημάτων, σύμφωνα με τα πιο πάνω αποτελέσματα και να διερευνήσετε ποιο από τα δύο τμήματα έχει περισσότερη ομοιογένεια στους βαθμούς. **Παράδειγμα:** *Συντελεστής μεταβλητότητας* • (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας των δύο τμημάτων A_1 και A_2, με βάση τον πιο πάνω πίνακα. (β) Ποιο από τα δύο τμήματα παρουσιάζει περισσότερη ομοιογένεια στους βαθμούς του και γιατί;	γίνεται ελάχιστη όταν $x = \bar{x}$. Να δώσετε στατιστική ερμηνεία του αποτελέσματος. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι βαθμού πολυώνυμο είναι η συνάρτηση f; • Σε ποια τιμή του x αντιστοιχεί η ελάχιστη τιμή ενός τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. • Σε ποιο στατιστικό μέτρο αναφέρεται η συνάρτηση; • Τι συμπεραίνω για τον συγκεκριμένο αριθμό που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση; (β) Να αποδείξετε ότι ο τύπος που μας δίνει τη διακύμανση ενός συνόλου τιμών ($s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$) μπορεί να πάρει τη μορφή: $s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2}{\nu} - (\bar{x})^2$ (γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των βαθμών ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών, χρησιμοποιώντας τους δύο τύπους. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους. $12,13,20,8,10,11,10,9,7,14,$ $15,15,19,12,19,9$ *Απαντώ στην ερώτηση:* • Πώς συνδέεται το άθροισμα $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu$ με την τιμή της μέση τιμής $\bar{x}$;

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)			
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΣ ΚΟΡΜΟΣ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Πεδίο ορισμού - σύνολο τιμών και συναρτήσεις $\mathbf{1-1}$** (Α6.1α**) Ορίζουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συνάρτησης και αναγνωρίζουν πότε ορίζεται ή όχι συνάρτηση.	1.1 Αναγνωρίζουν πότε ορίζεται μία συνάρτηση, όταν δίνεται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπως βελοδιάγραμμα, τύπος και γραφική παράσταση. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια συνάρτησης ✓ Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών ✓ Αναπαραστάσεις συνάρτησης **Νέες Έννοιες:** ✓ Γράφημα συνάρτησης $f: A \to B$ ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης $f: A \to B$	**Παραδείγματα:** *Αναγνώριση συνάρτησης* ➢ *Με βελοδιάγραμμα* • Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα με κατάλληλο βελοειδές διάγραμμα το οποίο να μην αποτελεί συνάρτηση. ➢ *Με τύπο συνάρτησης* • Ποιοι από τους πιο κάτω τύπους αποτελούν συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (α) $y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ (β) $y^2 = 4x, x \geq 0$ ➢ *Με γραφική παράσταση* • Ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αποτελούν συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** (α) Να δώσετε τον ορισμό του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μίας συνάρτησης. (β) Να εξηγήσετε πώς από μία γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της και το αντίστοιχο σύνολο των τιμών της. (γ) Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα άρρητης συνάρτησης, η οποία να έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο των τιμών της. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς ελέγχουμε αν μία γραφική παράσταση αποτελεί ή όχι συνάρτηση;

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Α6.1α) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

		 	• Πώς μπορούμε να παραλληλίσουμε ένα βελοειδές διάγραμμα με μία γραφική παράσταση σε σύστημα συντεταγμένων;
	1.2 Βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών συνάρτησης, όταν δίνεται ο τύπος της. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια Συνόλου ✓ Συνάρτηση με τύπο **Νέες Έννοιες:** ✓ Πεδίο Ορισμού συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ Συμβολισμοί: $D(f)$, A_f ✓ Σύνολο τιμών συνάρτησης f Συμβολίζεται με $f(A)$ και ισχύει $f(A) \subseteq B$. *Παρατήρηση:* ✓ Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης και ζητείται να βρούμε το πεδίο	**Παράδειγμα:** *Εύρεση πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών συνάρτησης που δίνεται με τύπο* • Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων που δίνονται από τους τύπους: (α) $f(x) = 3x - 2$ (β) $g(x) = \sqrt{2x-6}$ (γ) $h_1(x) = \frac{x}{x-3}$ (δ) $h_2(x) = \frac{x}{x-3}, x \geq 5$	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ γραφικές παραστάσεις, για να βρω το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.* **Παράδειγμα:** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης με την πιο κάτω γραφική παράσταση: 

	ορισμού βρίσκουμε το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο (το ευρύτερο) τιμών του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$ να ανήκει στο $\mathbb{R}$.		*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Αν όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης προβληθούν πάνω στον άξονα των x, ποιο σύνολο μας δίνουν; • Πώς μπορώ να προσδιορίσω ανάλογα και το σύνολο τιμών;
2. **Ίσες συναρτήσεις και πράξεις με συναρτήσεις** (Α6.2) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων και τις πράξεις συναρτήσεων.	2.1 Μελετούν την ισότητα δύο συναρτήσεων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης, όταν δίνεται ο τύπος της **Νέες Έννοιες:** ✓ Ίσες συναρτήσεις: Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$. *Σημείωση:* • Μπορεί δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο να είναι ίσες και δύο άλλες συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο να μην είναι ίσες.	**Παραδείγματα:** *Ίσες συναρτήσεις* • Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ και $g(x) = x + 3$ είναι ίσες. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f = g$. • Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2, x \in \{-1,0,1\}$ και $g(x) = x^4, x \in \{-1,0,1\}$ είναι ίσες μεταξύ τους.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** (α) Πότε δύο συναρτήσεις, οι οποίες έχουν ακριβώς τον ίδιο τύπο, δεν είναι ίσες; Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα. (β) Πότε δύο συναρτήσεις, οι οποίες έχουν διαφορετικό τύπο, μπορεί να είναι ίσες; Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιος είναι ο ακριβής ορισμός της ισότητας δύο συναρτήσεων; • Ποιο από τα δύο βασικά στοιχεία του ορισμού της ισότητας δεν ισχύει για το (α); • Τι πρέπει να έχουν απαραίτητα οι δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο για να είναι ίσες;
	2.2 Ορίζουν και να εφαρμόζουν τις τέσσερεις στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Πράξεις με πολυώνυμα ✓ Πράξεις με ρητά κλάσματα ✓ Τομή δύο συνόλων	**Παράδειγμα:** *Πράξεις συναρτήσεων* • Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$, όταν: (α) $f(x) = x^2 - 9$ και $g(x) = x + 3$ (β) $f(x) = 3x + 1, x \in [0,3)$ και $g(x) = 2x - 4$, $x \in (1,5]$	**ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων

Νέες Έννοιες:

✓ Πράξεις με συναρτήσεις

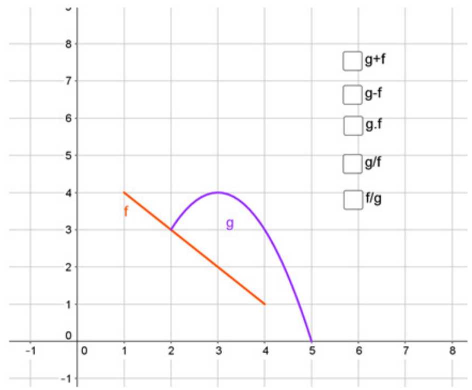
Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A \cap B \neq \emptyset$ ορίζουμε:

- Το άθροισμα των συναρτήσεων $f+g$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in A \cap B$.
- Τη διαφορά των συναρτήσεων $f-g$ με $(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in A \cap B$.
- Το γινόμενο των συναρτήσεων $f \cdot g$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A \cap B$.
- Το πηλίκο των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A \cap B$, $g(x) \neq 0$.

Παρατήρηση:

- Γραφικά η συνάρτηση $f+g$ αποτελείται από τα σημεία $\big(\alpha, f(\alpha) + g(\alpha)\big)$ για όλα τα $\alpha \in A \cap B$.

f και g.



(α) Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές:

- $f(2) + g(2)$,
- $g(3) - f(3)$
- $g(4) \cdot f(4)$
- $\frac{g(4)}{f(4)}$
- $\frac{f(2)}{g(2)}$

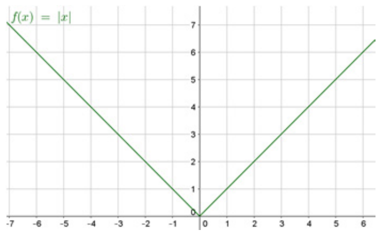
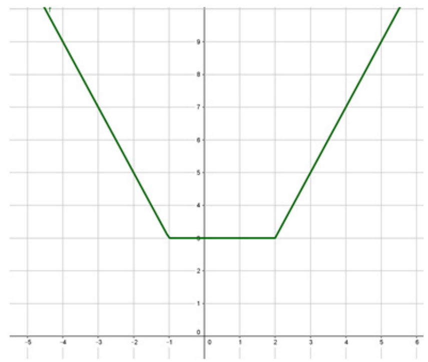
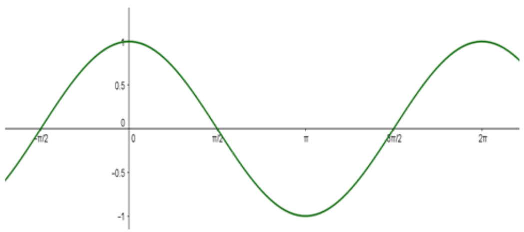
(γ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, οι οποίες δημιουργούνται από τις f και g:

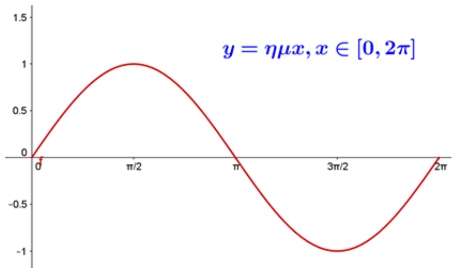
$h = g + f,\ p = g - f,\ q = g \cdot f,\ r = \frac{g}{f}$ και $s = \frac{f}{g}$

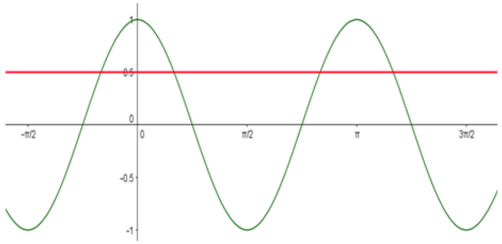
(δ) Να αναφέρετε κατά πόσο το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων h, p, q, r και s διαφέρει από το πεδίο ορισμού των δύο αρχικών συναρτήσεων f και g.

(ε) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«B_Lyk_NeesSynartiseis2.ggb»* και να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας.

			(στ) Μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές $f(2)+g(2)$, $f(3)+g(3)$, $f(4)+g(4), f(5)-g(5)$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (ζ) Να βρείτε τον τύπο της κάθε νέας συνάρτησης, αν γνωρίζετε ότι η f είναι γραμμική εξίσωση και η g έχει τύπο δευτεροβάθμιου τριωνύμου. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Σε ποιες περιπτώσεις κάποιο άθροισμα της μορφής $f(a) \pm g(a)$ ενδεχομένως και να μην ορίζεται; • Ποιο είναι το πιο σημαντικό σημείο που πρέπει να προσεχθεί, για να ορισθεί ένα στοιχείο της μορφής $f(x) \pm g(x)$; • Τι επιπλέον πρέπει να προσέξω κατά τον ορισμό του $\frac{f(a)}{g(a)}$;
3. **Συναρτήσεις με απόλυτες τιμές** (Α6.7) Μελετούν συναρτήσεις με απόλυτες τιμές, τις μετασχηματίζουν σε τμηματικές συναρτήσεις και κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	3.1 Μελετούν και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με απόλυτες τιμές. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Γραφικές παραστάσεις ευθειών ✓ Γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ **Νέες Έννοιες:** ✓ Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής. Η συνάρτηση $f(x) = \|x\| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ και η γραφική της	**Παράδειγμα:** *Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές* • Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, αφού πρώτα τις μετασχηματίσετε σε τμηματικές: (α) $f(x) = \|x+2\|$ (β) $g(x) = x + \|x-1\|$ (γ) $h(x) = x^2 + \|x-2\|$	**ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x), x \in \mathbb{R}$, για να γράψετε τον τύπο της.

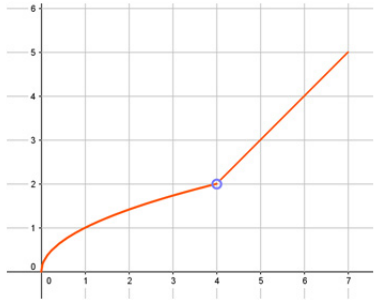
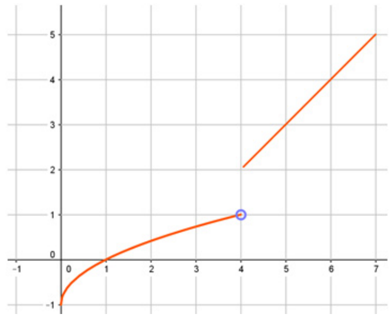
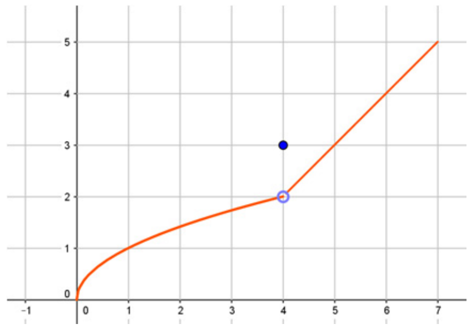
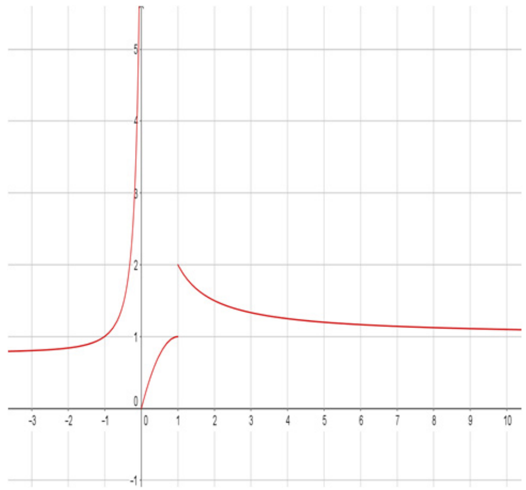
	παράσταση:  		 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πόσα διαφορετικά διαστήματα υπάρχουν κατά τα οποία αλλάζει τύπο η συνάρτηση; • Ποια μορφή πρέπει να έχει ο κάθε τύπος σε κάθε διάστημα που ορίσατε;
4. **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις** (Α6.16) Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.	4.1 Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί τυχαίας γωνίας **Νέες Έννοιες:** ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις ✓ Τριγωνομετρικές εξισώσεις	**Παραδείγματα:** *Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων* • Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στο ευρύτερο πεδίο ορισμού της. • Να αναγνωρίσετε τη συνάρτηση στην πιο κάτω γραφική παράσταση, αιτιολογώντας την απάντησή σας. 	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς και αναζητώ γενικεύσεις και σύντομες λύσεις. Παρατηρώ την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και είμαι σε θέση να τις διατυπώνω με εναλλακτικό τρόπο.* **Παραδείγματα:** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ημx, x \in [0,2\pi]$. (α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τη συνάρτηση $y = ημx, x \in [-4\pi, 6\pi]$. (β) Πώς θα είναι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g(x) = ημ2x, x \in [0,2\pi]$ και $h(x) = ημ3x, x \in [0,2\pi]$;

			 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $y = \text{ημ}\, x, x \in \mathbb{R}$; • Πώς αλλάζει η περιοδικότητα της συνάρτησης $y = \text{ημ}(2x), x \in [0,2\pi]$;
	4.2 Να επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί **Νέες Έννοιες:** ✓ Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων που ανάγονται στη μορφή: ➢ $\text{ημ}x = c$ ➢ $\text{συν}x = c$ ➢ $\text{εφ}x = c$	**Παραδείγματα:** *Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων* • Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $\text{ημ}x = 2, x \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $\text{ημ}2x = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$ (β) $\text{συν}3x = 1,2\ , x \in \mathbb{R}$ • Να χρησιμοποιήσετε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \text{συν}x$ και $y = \frac{1}{2}$, για να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $$\text{συν}x = \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Χρησιμοποιώ Μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ.), για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσω προβλήματα.* ***Παράδειγμα:*** Ένα σώμα κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει $1{,}4\ m$ από το έδαφος. Όταν το σώμα αρχίζει να ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του σε m από το πάτωμα δίνεται από την εξίσωση: $h = 1{,}4 + 0{,}6 \cdot \text{ημ}2t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. (α) Να υπολογίσετε τη διαφορά μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου ύψους. (β) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{12}$. (γ) Ποια χρονική στιγμή $(0 \leq t \leq 2\pi)$ το σώμα βρίσκεται σε ύψος $1{,}8\ m$; *Απαντώ στις ερωτήσεις:*

			• Ποιες εξισώσεις προκύπτουν, όταν $t = \frac{\pi}{12}$ ή όταν $h = 1{,}8$; • Είναι μοναδικές οι λύσεις των εξισώσεων αυτών;
5. **Επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τριγωνομετρία** (Α6.18) Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.	5.1 Χρησιμοποιούν νόμο ημιτόνων και συνημιτόνων για επίλυση πραγματικών προβλημάτων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί οξείας γωνίας ✓ Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο **Νέες Έννοιες:** ✓ Νόμος των ημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$ ✓ Νόμος συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$	**Παραδείγματα:** *Επίλυση προβλημάτων* • Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να φέρετε το ύψος $A\Delta$. (α) Να εκφράσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους το ύψος $A\Delta$ συναρτήσει κύριων στοιχείων του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$. (β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$. (γ) Πώς θα αποδείξουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Δύο κρουαζιερόπλοια ξεκινούν την ίδια ώρα από το λιμάνι της Λεμεσού. Το ένα κατευθύνεται με ταχύτητα 60 km/h προς το Λίβανο και το άλλο με ταχύτητα 70 km/h προς το Ισραήλ. Αν η γωνία μεταξύ των δύο δρομολογίων είναι 28°, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο πλοίων σε 2 ώρες. 

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα; • Τι προσπαθώ να βρω; • Ποια στρατηγική ακολουθώ, για να το επιλύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πως ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
6. **Ακολουθίες πραγματικών αριθμών** (Α7.1) Αναφέρουν τον ορισμό της ακολουθίας και βρίσκουν τους όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός τύπος.	6.1 Αναφέρουν τον ορισμό της ακολουθίας και βρίσκουν τους όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός τύπος της. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Το σύνολο των φυσικών αριθμών ✓ Έννοια συνάρτησης **Νέες Έννοιες:** ✓ Ορισμός ακολουθίας: Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών Συμβολικά έχουμε $a: N \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ και γράφουμε πιο απλά, $(a_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ ή ακόμα $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ ✓ Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού μιας ακολουθίας, δηλαδή τα πρότυπα της συνάρτησης, τα λέμε	**Παράδειγμα:** *Ορισμός ακολουθίας και εύρεση όρων της* • Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών: (α) $a_\nu = \frac{2}{\nu+4}$ (β) $a_\nu = 2(-1)^{\nu+1}$ (γ) $a_{\nu+1} = 2a_\nu + 1, a_1 = 2$ • Να γράψετε ένα αναγωγικό τύπο για τις ακολουθίες που δίνονται οι πέντε πρώτοι όροι τους: (α) $2,5,8,11,14,17, \ldots$ (β) $2,6,18,54,162, \ldots$	**ΜΠ.2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Κατανοώ σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ διαδοχικών όρων ακολουθίας, συμβολίζω με αναδρομικό τύπο μία ακολουθία και τον ερμηνεύω λεκτικά.* **Παράδειγμα:** Η γνωστή ακολουθία Fibonacci $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$είναι «δύσκολο» να εκφραστεί με ένα κλειστό τύπο, ο οποίος να μας δίνει το γενικό όρο της ακολουθίας. Ωστόσο, μπορούμε να εκφράσουμε τον κάθε όρο της δίνοντας κατάλληλο αναδρομικό (αναγωγικό) τύπο: (α) Να γράψετε τους τρεις επόμενους όρους της ακολουθίας, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (β) Να εκφράσετε λεκτικά τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει κάθε όρος μετά τον δεύτερο όρο της. (γ) Ποιο αναγωγικό τύπο μπορούμε να δώσουμε, για να εκφράσουμε τον γενικό τύπο της ακολουθίας Fibonacci; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιο κανόνα ακολουθεί ένας όρος της ακολουθίας σε σχέση με τους προηγούμενους του; • Ο κανόνας αυτός ισχύει και για τους δύο

	δείκτες και τις εικόνες των δεικτών **όρους** της ακολουθίας.		πρώτους όρους της ακολουθίας; • Αν ένας τυχαίος όρος της ακολουθίας συμβολισθεί με a_ν, πώς μπορούμε να συμβολίσουμε τον προηγούμενό του;
7. **Υπολογισμός ορίου αναλυτικά και γραφικά** (Α7.23) Υπολογίζουν το όριο μιας συνάρτησης αναλυτικά, γραφικά και αριθμητικά.	7.1 Υπολογίζουν αναλυτικά όρια συναρτήσεων. **Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ Έννοια ορίου **Νέες Έννοιες:** ✓ Υπολογισμός ορίων Βασικά όρια: ➢ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ➢ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ➢ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ ➢ $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ ➢ $\lim_{x\to+\infty}c=c$ ➢ $\lim_{x\to-\infty}c=c$ ➢ $\lim_{x\to0}\frac{\text{ημ}x}{x}$	**Παράδειγμα:** *Υπολογισμός ορίου συνάρτησης αναλυτικά* • Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια: ➢ $\lim_{x\to3}(4x^2+1)$ ➢ $\lim_{x\to0}\sqrt{3x+5}$ ➢ $\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^2+x-6}$ ➢ $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+7x+12}$ ➢ $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-2)$	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** (α) Να δώσετε ενδεικτικές τιμές, χρησιμοποιώντας πίνακα τιμών, για να εικάσετε την τιμή των πιο κάτω ορίων. (β) Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή στα πιο κάτω όρια και να επεξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε. i. $\lim_{x\to6}\frac{x^2-36}{3x-18}$ ii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-18}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες τιμές θα δίνατε στην περίπτωση κατά την οποία $x\to6$; • Θα δίνατε την τιμή $x=6$; • Ποιον αριθμό πλησιάζει η συνάρτηση $\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-18}$ για πολύ μεγάλες τιμές του x $(x\to+\infty)$;
	7.2. Υπολογίζουν όρια από τη γραφική παράσταση συναρτήσεων. **Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ Έννοια ορίου ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης **Νέες Έννοιες:**	**Παράδειγμα:** *Υπολογισμός ορίου συνάρτησης γραφικά* • Να βρείτε το όριο στις πιο κάτω περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.	**ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.*

	✓ Υπολογισμός ορίων από γραφική παράσταση συνάρτησης	(α) $\lim_{x\to4} f(x)$  (β) $\lim_{x\to4} f(x)$  (γ) $\lim_{x\to4} f(x)$ 	**Παράδειγμα:** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια, αν υπάρχουν, αιτιολογώντας την απάντησή σας: (α) $\lim_{x\to-1} f(x)$ (β) $\lim_{x\to0} f(x)$ (γ) $\lim_{x\to1} f(x)$ (δ) $\lim_{x\to-1} f(x)$ (ε) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι πρέπει να προσέχω, όταν υπολογίζω όρια από γραφικές παραστάσεις; • Τι συμβαίνει, όταν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης «διακόπτεται» σε ένα σημείο x_0; Τι πρέπει να προσέξω στο όριο στην περίπτωση αυτή;

8. **Λογαριθμική Συνάρτηση** (Α7.9)
Ορίζουν και εφαρμόζουν τη λογαριθμική συνάρτηση στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών με βάση ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$.

8.1 Ορίζουν και εφαρμόζουν τη λογαριθμική συνάρτηση.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:
- ✓ Ιδιότητες δυνάμεων
- ✓ Εκθετική συνάρτηση

Νέες Έννοιες:
- ✓ Λογαριθμική συνάρτηση
- ✓ Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση a, όπου $a > 0, a \neq 1$, είναι ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $a^x = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_a \theta$. Δηλαδή: $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$, με $\theta > 0, 0 < a \neq 1$.
- ✓ Αν $0 < a \neq 1$ και στον θετικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε το $\log_a x$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$, η οποία λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση a.

Παραδείγματα:
Λογαριθμική συνάρτηση
- Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων για τις συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής x, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του λογαρίθμου:
  - ➢ $f(x) = \log_2 x,\ x = 16$
  - ➢ $f(x) = \log_3 x,\ x = 1$
  - ➢ $f(x) = \log x\ ,\ x = \frac{1}{100}$
- Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων για τις συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής x, χρησιμοποιώντας υπολογιστική μηχανή:
  - ➢ $f(x) = \log x\ ,\ x = 1000$
  - ➢ $f(x) = \log_4 x\ ,\ x = 9$
  - ➢ $f(x) = \ln x\ ,\ x = e^3$
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$ και να αναφέρετε το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της και τις τομές της με τους άξονες των συντεταγμένων.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \log(x-2) + \ln(4-x)$$

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος
Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Ο χρόνος t σε χρόνια που χρειάζεται ο παγκόσμιος ανθρώπινος πληθυσμός για να διπλασιαστεί, δεδομένου ότι αυξάνεται με ένα σταθερό ρυθμό r, δίνεται από τον τύπο:

$$t(r) = \frac{\ln 2}{r}$$

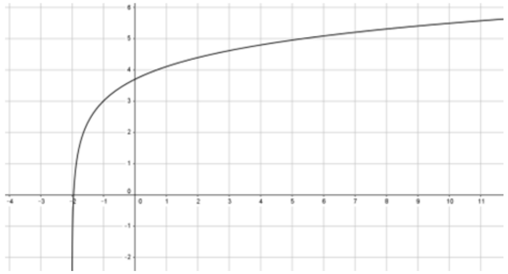
(α) Να συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα τιμών.

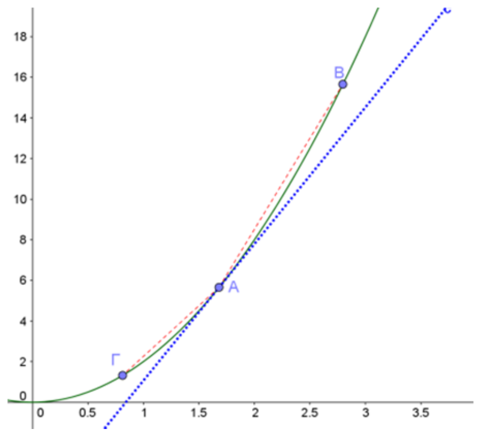
r	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025
t					

(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης t.

Απαντώ στις ερωτήσεις:
- Τι πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;
- Τι προσπαθώ να βρω;
- Ποια στρατηγική ακολουθώ, για να το επιλύσω;
- Είναι η απάντησή μου λογική;
- Πως ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;

9. **Επίλυση εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων** (Α7.22) Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.	9.1 Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ιδιότητες λογαρίθμων ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Λογαριθμική-εκθετική συνάρτηση **Νέες Έννοιες:** ✓ Χρήση των εκθετικών και λογαριθμικών ιδιοτήτων για επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων.	**Παράδειγμα:** *Επίλυση εκθετικών – λογαριθμικών εξισώσεων* • Να επιλύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις: (α) $2^x = 8$ (β) $\ln x = \ln 5$ (γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ (δ) $\log x = 2$ (ε) $5^x = 7$ (στ) $(\log_6 x)^2 = 36$ (ζ) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ (η) $\log_3(5x-1) = \log_3(x+7)$ (θ) $\log_6(3x+14) - \log_6(5) = \log_6 2x$ (ι) $2^{\log x} = 1$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής απόσβεσης (δηλαδή η ποσότητα $Q(t)$ του υλικού που απομένει μετά από t χρόνια, δίνεται από σχέση της μορφής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υλικού). Αν η ημιζωή του υλικού (δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να μείνει ακριβώς η μισή ποσότητα) είναι 3 χρόνια, να: (α) αποδείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$ (β) υπολογίσετε μετά από πόσα χρόνια θα απομείνουν $250\ g$, αν αρχικά υπήρχαν $8\ Kg$ ραδιενεργού υλικού. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Όταν η ημιζωή είναι 3 χρόνια, τότε με τι ισούται το $Q(3)$; • Με τι ισούται το e^c; • Ποια εξίσωση προκύπτει στο (β) και ποια είναι η μεταβλητή;
10. **Λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια** (Α7.11) Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά	10.1 Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια γραφικής παράστασης ✓ Χρήση λογισμικών	**Παράδειγμα:** *Χρήση λογισμικών* • Να κατασκευάσετε τους δρομείς α και β και να κάνετε τη γραφική παράσταση $f(x) = \ln(x+\alpha) + \beta$. Να κάνετε τις παρατηρήσεις και να καταγράψετε το αποτέλεσμα, όταν: (α) μεταβάλλετε το δρομέα α (β) μεταβάλλετε το δρομέα β (γ) Για ποιες τιμές των α και β έχουμε τη πιο κάτω γραφική παράσταση:	**ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Δίνεται το εφαρμογίδιο *«EkthetikiLog_ggb»*, στο οποίο μεταβάλλεται ο δρομέας α, όπου α είναι πραγματικός αριθμός. Στο εφαρμογίδιο εμφανίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$. Ένα σημείο A

εφαρμογίδια.	δυναμικής Γεωμετρίας **Νέες Έννοιες:** ✓ Παρατήρηση και εικασίες για τον ρόλο που έχουν οι παράμετροι, όταν μεταβάλλονται		βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της f και μπορεί να μετακινείται . Το σημείο A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $y = x$. Κατά την κίνηση του το A αφήνει «ίχνος», χαράσσοντας την καμπύλη μιας άλλης συνάρτησης g. Να μεταβάλλετε το δρομέα a και να αναφέρετε τις τομές με τον Oy άξονα και να περιγράψετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης, όταν το $x \to \pm\infty$. Να αναφέρετε ομοιότητες και διαφορές για: i. $a > 1$ ii. $0 < a < 1$ iii. $a = 1$ Να μετακινήσετε το σημείο A και να επαναλάβετε το (α) για τη συνάρτηση g. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια σημαντική διαφορά παρουσιάζει η συνάρτηση a^x, όταν $a > 1$ και $0 < a < 1$; • Ποια είναι η σχέση των δύο συναρτήσεων οι οποίες είναι συμμετρικές στην $y = x$;
11.**Παράγωγος συνάρτησης** (Α7.12) Ορίζουν την έννοια της παραγώγου και υπολογίζουν την παράγωγο αλγεβρικών συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ή $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ή $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.	11.1 Ορίζουν την έννοια της παραγώγου. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια ορίου συνάρτησης **Νέες Έννοιες:** ✓ Παράγωγος Συνάρτησης ✓ Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0	**Παραδείγματα:** *Ορισμός παραγώγου* • Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f'(2)$ και $f'(3)$. • Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$, όταν: (α) $f(x) = x^2$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** Να δώσετε τον ακριβή ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ. *Απαντώ στην ερώτηση:* • Αν $x_0 \in \Delta$ και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, τι πρέπει να προσέξουμε για να αποφασίσουμε κατά πόσο μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0;

	και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. ✓ Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ.		
12.**Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου** (Α7.13) Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = \alpha$ ως οριακή θέση χορδής AB όταν το σημείο B τείνει στο σημείο A.	12.1 Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = a$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Εφαπτομένη κύκλου ✓ Παραγωγίσιμη συνάρτηση **Νέες Έννοιες:** ✓ Εφαπτομένη καμπύλης ✓ Εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *Σημείωση:* • Γεωμετρικά η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = a$ ορίζεται ως η οριακή θέση της χορδής AB όταν το σημείο B τείνει στο σημείο A.	**Παράδειγμα:** *Εφαπτομένη καμπύλης* • Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Να βρείτε: (α) την $f'(1)$ (β) την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο για $x = 1$	**ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Αν $A(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία B, Γ είναι δύο «γειτονικά» σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, να εξηγήσετε με ποιο τρόπο οι κλίσεις των χορδών AB και $A\Gamma$ θα «βοηθήσουν» ώστε να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Αφού το σημείο A έχει συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$, τι συντεταγμένες θα δίναμε στα σημεία B και Γ τα οποία βρίσκονται

			κοντά στο A; • Είναι ίσες οι κλίσεις των χορδών AB και $A\Gamma$; • Υπάρχει η δυνατότητα να μπορέσουμε με κατάλληλη επιλογή των σημείων B και Γ πάνω στην καμπύλη και εκατέρωθεν του A να κάνουμε τις κλίσεις τους $(\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma})$ ίσες; • Αν $x_B = x_0 + h$ τι συμβαίνει με το h όταν $B \to A$. Τι μπορούμε να υποθέσουμε για το x_Γ;
13.**Κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων** (Α7.15α) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων.	13.1 Βρίσκουν την παράγωγο του αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων αλγεβρικά. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Παραγωγίσιμη συνάρτηση **Νέες Έννοιες:** ✓ Κανόνες παραγώγισης ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(c) = 0$ ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^\nu) = \nu x^{\nu-1}$ ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(cf(x)\right) = cf'(x)$ ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(f(x) \pm g(x)\right) = f'(x) \pm g'(x)$ ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ➢ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	**Παραδείγματα:** *Κανόνες παραγώγισης* • Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = 3$ (β) $f(x) = x^7$ (γ) $f(x) = \sqrt{x}$ (δ) $f(x) = \frac{5}{x^4}$ (ε) $f(x) = 3x - 2$ (στ) $f(t) = t^3 - 3t + 5$ (ζ) $f(x) = (x+1)(x^2-3)$ (η) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ • Να βρείτε την κλίση της γραφικής παράσταση των πιο κάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίνονται: (α) $f(x) = 3x$, στο $A(-2,-6)$ (β) $f(x) = 3/x^2$, στο $B(1,3)$ (γ) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, στο $\Gamma(-2,-1)$ (δ) $f(x) = (4x+1)^2$, στο $\Delta(0,\ 1)$ (ε) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$, στο $E(1,2)$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Η ταχύτητα ν ενός αντικειμένου (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο) δίνεται από τον τύπο: $v(t) = 36 - t^2, 0 \leq t \leq 36$ (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας και την επιτάχυνση του αντικειμένου αυτού τη χρονική στιγμή $t = 3\ sec$. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα; • Τι προσπαθώ να βρω; • Ποια στρατηγική ακολουθώ, για να το επιλύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πως ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΡΙΘΜΟΙ)			
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΣ ΚΟΡΜΟΣ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Έννοια – Ιδιότητες λογάριθμου** (Αρ.7.15**) Ορίζουν την έννοια του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού $\alpha > 0$ με βάση οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $\beta \neq 0,\ \beta \neq 1$, αναφέρουν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.	1.1 Ορίζουν την έννοια του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ιδιότητες δυνάμεων **Νέες Έννοιες:** ✓ Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση α, όπου $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, είναι ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $\alpha^x = \theta$ και συμβολίζεται με $log_\alpha \theta$. Δηλαδή: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$, με $\theta > 0, 0 < \alpha \neq 1$.	**Παράδειγμα:** *Έννοια λογάριθμου θετικού αριθμού* • Να βρείτε το x στις πιο κάτω εξισώσεις: (α) $\log x = 2$ (β) $\ln(x+1) = 3$ (γ) $5^x = 8$ (δ) $\log_5 x = 3$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.* **Παράδειγμα:** Με τη βοήθεια του ορισμού του λογάριθμου θετικού αριθμού, να αποδείξετε ότι: (α) $\log_\alpha 1 = 0, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ (β) $\log_\alpha \alpha = 1, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ (γ) $\log_\alpha \alpha^x = x, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ (δ) $\alpha^{\log_\alpha x} = x, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x > 0$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια μαθηματική ορολογία χρησιμοποιώ, για να αποδείξω τις πιο πάνω ισότητες; • Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Αρ.7.15) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

	1.2 Χρησιμοποιούν την έννοια του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού, για να αποδεικνύουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια λογάριθμου **Νέες Έννοιες:** ✓ Ιδιότητες λογαρίθμων	**Παραδείγματα:** *Ιδιότητες λογαρίθμων* • Να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής: (α) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ (β) $\ln e^6 - \ln e^2$ (γ) $\dfrac{\log 8}{\log 2}$ (δ) $\log_4 \dfrac{1}{64}$ • Να εκφράσετε τις πιο κάτω παραστάσεις ως λογάριθμους μίας ποσότητας: (α) $\ln 2 + \ln x$ (β) $\log_3 z - \log_3 y$ (γ) $2\log_2 x + 4\log_2 y$ (δ) $\log x + \frac{1}{2}\log(x+2)$ (ε) $\ln x + 2\ln y - 3\ln z$ • Να αποδείξετε ότι $\log_x(a\beta) = \log_x a + \log_x \beta$, όπου $a, \beta, x > 0$ και $x \neq 1$.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.** *Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ισότητες είναι ορθές ή λανθασμένες, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας. (α) $\log_6 2 \cdot \log_6 5 = \log_6 10$ (β) $2\log_3 4 - \log_3 2 = \log_3 8$ (γ) $\ln^3 x = 3\ln x\,, x > 0$ (δ) $\ln\dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \ln x\,, x > 0$ (ε) $\log_a a = 1\,, a \in \mathbb{R}$ (στ) $(\log_a a)^x = x, a > 0, a \neq 1$ *Απαντώ στην ερώτηση:* • Ποιες ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να ελέγξω την ορθότητα των πιο πάνω ισχυρισμών;
	1.3 Εφαρμόζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ιδιότητες λογαρίθμων **Νέες Έννοιες:** ✓ Εφαρμογή ιδιοτήτων λογαρίθμων στην επίλυση προβλήματος	**Παράδειγμα:** *Επίλυση προβλήματος* • Μία ομάδα ατόμων παρακολούθησε ένα συγκεκριμένο αριθμό διαλέξεων και παρακάθισε σε μία εξέταση, στα πλαίσια ενός ψυχολογικού πειράματος. Ακολούθως, στα άτομα αυτά δινόταν μία εξέταση κάθε μήνα (για ένα χρόνο), για να διαπιστωθεί πόσες γνώσεις παρέμεναν στην μνήμη των ατόμων αυτών. Ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων της ομάδας αυτής δίνεται από το «μοντέλο ανθρώπινης μνήμης»	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα και σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω. Ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.* **Παράδειγμα:** Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό N των εμπορικών τραπεζών μίας χώρας από το 1996 μέχρι και το 2005. Τα δεδομένα του πίνακα μπορούν να περιγραφούν από το μοντέλο $N = 13387 - 2190{,}5\ln t$, όπου t ο χρόνος (σε χρόνια) και η τιμή $t = 6$ αντιπροσωπεύει τη χρονιά 1996.

$f(t) = 75 - 6\ln(t+1), 0 \leq t \leq 12$, όπου t ο χρόνος σε μήνες.

(α) Να βρείτε τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων της ομάδας στην αρχική εξέταση $(t = 0)$.

(β) Να βρείτε τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων της ομάδας στο τέλος του 2ου μήνα $(t = 2)$.

(γ) Να βρείτε τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων της ομάδας στο τέλος του 6ου μήνα $(t = 6)$.

Χρονιά	Αριθμός N
1996	9527
1997	9143
1998	8774
1999	8580
2000	8315
2001	8079
2002	7888
2003	7770
2004	7630
2005	7540

Κατά τη διάρκεια ποιας χρονιάς οι εμπορικές τράπεζες της χώρας αυτής θα μειωθούν στις 7250, με βάση το πιο πάνω μοντέλο;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;
- Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το επιλύσω;
- Είναι η απάντησή μου λογική;
- Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησης μου;

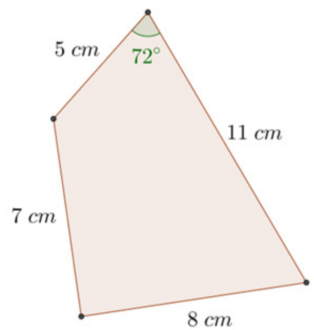
<table>
<tr><th colspan="4">ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)</th></tr>
<tr><th colspan="4">ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΣ ΚΟΡΜΟΣ</th></tr>
<tr><th>ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="3">ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td rowspan="2">Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td colspan="2">Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης</td></tr>
<tr><td>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</td><td>Μαθηματικές Πρακτικές</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Εγγεγραμμένα τετράπλευρα σε κύκλο (Γ6.10α**) Ορίζουν ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο και διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες και τα κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων.</td><td>1.1 Ορίζουν τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα σε κύκλο.
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Βασικές γεωμετρικές έννοιες (κύκλος, εγγεγραμμένη γωνία, εφαπτομένη κύκλου, θεώρημα χορδής και εφαπτομένης κτλ.)
Νέες Έννοιες:
✓ Εγγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο
✓ Περιγεγραμμένος κύκλος σε τετράπλευρο</td><td>Παραδείγματα:
Ορισμός εγγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο
• Πότε ένα τετράπλευρο ονομάζεται εγγεγραμμένο σε κύκλο;
• Να εγγράψετε ένα τετράπλευρο σε δοσμένο κύκλο και να περιγράψετε ένα κύκλο σε δοσμένο τετράπλευρο.</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες εγγράψιμων τετραπλεύρων.</td><td>Παραδείγματα:
Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων
• Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $\hat{A} = 109°$ και $\hat{B} = 63°$, να υπολογίσετε τις</td><td>ΜΠ.4 Μοντελοποίηση
Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα, για να ερμηνεύσω ένα πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.</td></tr>
</table>

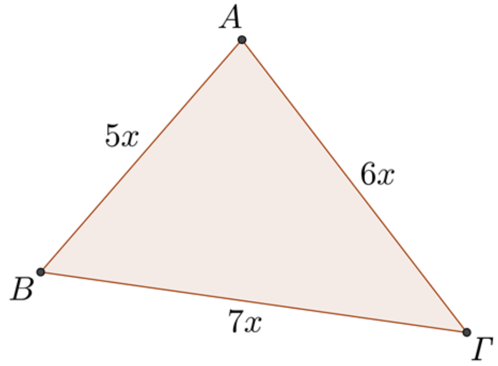
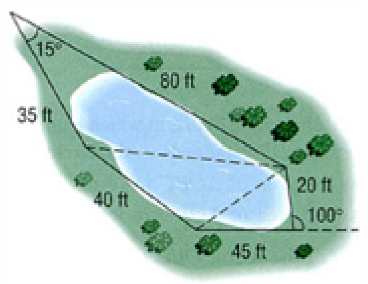
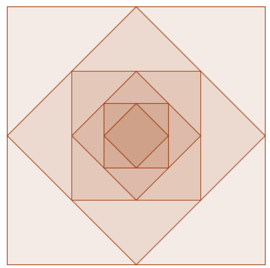
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Γ6.10α) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

	Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Εξωτερική γωνία, παραπληρωματικές γωνίες, εγγεγραμμένη γωνία ✓ Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου ✓ Σχετικές θέσεις ευθείας – κύκλου ✓ Μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος **Νέες Έννοιες:** ✓ Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων	γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$. • Είναι δυνατόν ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A_{\varepsilon\xi}} = 80°$ να είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. • Να αποδείξετε ότι αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.	**Παράδειγμα:** Έστω E ένα σημείο του ύψους $A\Delta$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και Z, H οι προβολές του E στις πλευρές του $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, Γ, H και Z. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια στρατηγική μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να λύσω το πρόβλημα; • Πώς μπορεί η κατασκευή του σχήματος να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος;
	1.3 Εφαρμόζουν τα κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων **Νέες Έννοιες:** ✓ Κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων	**Παραδείγματα:** *Κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων* • Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $A\Delta$ και BE. Να αποδείξετε ότι: (α) το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι εγγράψιμο (β) η ΔE είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλου, στο σημείο Γ • Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου και το ίχνος ενός ύψους του είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.* **Παράδειγμα:** Να διατυπώσετε τα κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων και στη συνέχεια να δώσετε απόδειξη για το καθένα από αυτά. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι τα τρία κριτήρια των εγγράψιμων τετραπλεύρων; • Ποιες έννοιες χρησιμοποιώ, για να αποδείξω τα συγκεκριμένα κριτήρια;

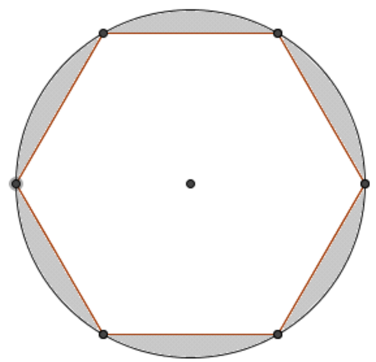
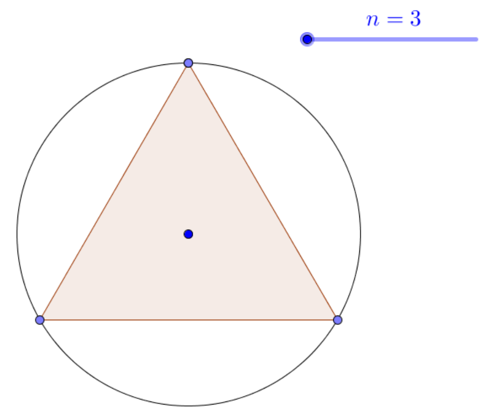
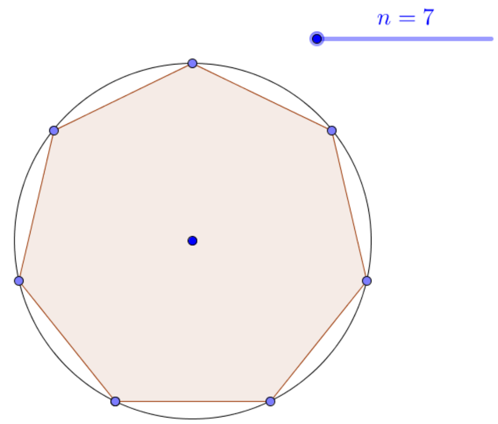
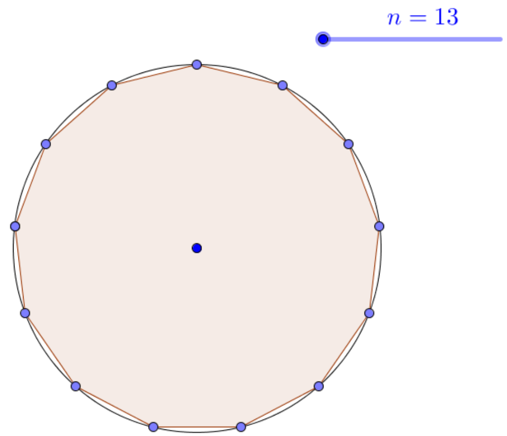
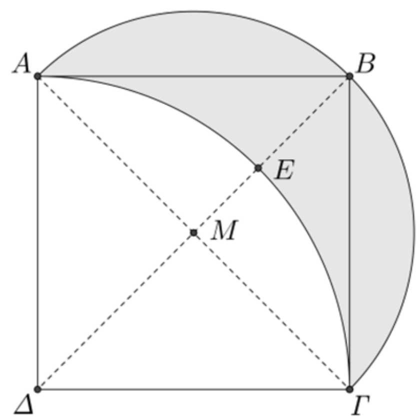
<table>
<tr><td colspan="4">ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΤΡΗΣΗ)</td></tr>
<tr><td colspan="4">ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΣ ΚΟΡΜΟΣ</td></tr>
<tr><td>ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</td><td colspan="3">ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td rowspan="2">Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td colspan="2">Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης</td></tr>
<tr><td>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</td><td>Μαθηματικές Πρακτικές</td></tr>
<tr><td>1. Επίλυση προβλήματος με τη χρήση λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης (Μ7.7**) Επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής (με τη χρήση αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων).</td><td>1.1 Επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής με τη χρήση λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων.
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Λογαριθμική – Εκθετική συνάρτηση
Νέες Έννοιες:
✓ Εφαρμογή λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης στην επίλυση προβλήματος</td><td>Παραδείγματα:
Επίλυση προβλήματος με τη χρήση λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης
• Ο ρυθμός με τον οποίο μια επαναφορτιζόμενη μπαταρία φορτίζεται μειώνεται όσο η μπαταρία προσεγγίζει τη μέγιστη φόρτισή της C_0. Ο χρόνος (σε ώρες) που απαιτείται για να αποφορτιστεί μία μπαταρία στην τιμή C, δίνεται από τον τύπο $$t=-k\cdot\ln\left(1-\frac{C}{C_0}\right),$$ όπου k μία θετική σταθερά, η οποία εξαρτάται από τον τύπο της μπαταρίας. Για μια συγκεκριμένη μπαταρία, ισχύει $k=0{,}25$. Αν αυτή η μπαταρία είναι πλήρως αποφορτισμένη, πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει στο 90% της μέγιστης φόρτισής της C_0;</td><td>ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος
Κατανοώ τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου (κάνω επαλήθευση και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη).
Παράδειγμα: Μία μικρή λίμνη είναι εφοδιασμένη με ένα συγκεκριμένο είδος ψαριού. Ο πληθυσμός των ψαριών περιγράφεται από τη συνάρτηση $$P(t)=\frac{10}{1+4e^{-0{,}8t}},$$ όπου P είναι ο αριθμός των ψαριών σε χιλιάδες και t είναι ο χρόνος σε χρόνια ($t=0$ θεωρείται η χρονική στιγμή κατά την οποία η λίμνη εφοδιάστηκε με τα ψάρια).</td></tr>
</table>

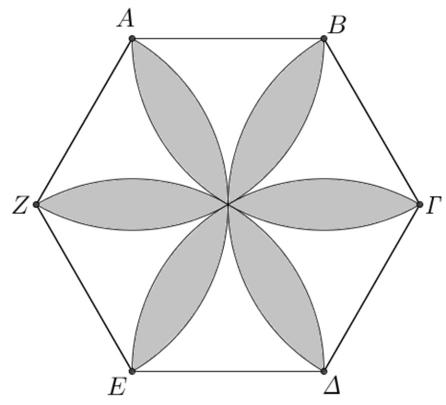
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Μ7.7) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

		• Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους πουλιών περιορίζεται από τον τύπο του οικοτόπου, στον οποίο τα πουλιά αυτά φτιάχνουν τις φωλιές τους. Ο πληθυσμός τους συμπεριφέρεται σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης $n(t) = \frac{5600}{0{,}5+27{,}5e^{-0{,}044t}}$, όπου t ο χρόνος (σε χρόνια). (α) Να υπολογίσετε τον αρχικό πληθυσμό των πουλιών. (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης n. (γ) Ποια τιμή προσεγγίζει ο πληθυσμός των πουλιών καθώς ο χρόνος αυξάνεται;	(α) Να υπολογίσετε τον πληθυσμό των ψαριών μετά την παρέλευση 3 χρόνων. (β) Ύστερα από πόσα χρόνια ο πληθυσμός των ψαριών της λίμνης θα ισούται με 5000;  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
2. **Επίλυση προβλήματος εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από την τριγωνομετρία** (Μ6.2) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία, την αναλυτική γεωμετρία και το διανυσματικό λογισμό.	2.1 Επιλύουν προβλήματα εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από την τριγωνομετρία. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Νόμος Ημιτόνων - Συνημιτόνων **Νέες Έννοιες:** ✓ Τύποι εμβαδού τριγώνου από την τριγωνομετρία ➢ $E = \frac{1}{2}\, \alpha\beta$ ημ Γ ➢ $E = \frac{1}{2}\, \alpha\gamma$ ημ B	**Παραδείγματα:** *Εμβαδόν σε τυχαίο τρίγωνο* • Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω τετραπλεύρου.  	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας και των τύπων υπολογισμού του εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Ένας ερευνητής θέλει να προσεγγίσει το εμβαδόν της επιφάνειας μίας λίμνης. Περπατά περιμετρικά στη λίμνη και παίρνει διάφορες μετρήσεις, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα όργανα. Οι μετρήσεις αυτές παρουσιάζονται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση, το εμβαδόν της επιφάνειας της λίμνης αυτής.

	➢ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\,A$	• Το εμβαδόν του πιο κάτω τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $54\sqrt{6}\ cm^2$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.  	 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες έννοιες - ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στο πρόβλημα; • Πώς σχετίζεται το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων, που εμφανίζονται στο πιο πάνω σχήμα, με το εμβαδόν της επιφάνειας της λίμνης;
3. **Επίλυση προβλήματος στις προόδους** (Μ6.6) Επιλύουν προβλήματα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.	3.1 Χρησιμοποιούν αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους στην επίλυση προβλήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Έννοια ακολουθίας ✓ Έννοια αριθμητικής – γεωμετρικής προόδου **Νέες Έννοιες:** ✓ Εφαρμογή των εννοιών αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου στην επίλυση προβλήματος	**Παραδείγματα:** *Αριθμητική – Γεωμετρική πρόοδος* • Να μοιράσετε δέκα φέτες ψωμί σε δέκα ανθρώπους, έτσι ώστε ο δεύτερος να πάρει $\frac{1}{8}$ της φέτας περισσότερο από τον πρώτο, ο τρίτος να πάρει $\frac{1}{8}$ της φέτας περισσότερο από το δεύτερο κοκ. 	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα, το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά 6 cm. Καθένα από τα υπόλοιπα τετράγωνα σχηματίζεται από την ένωση των μέσων των πλευρών κάθε «προηγούμενου» τετραγώνου. Ποια είναι η περίμετρος του $9^{ου}$ στη σειρά τετραγώνου; 

		• Ένας Η/Υ έλυσε κάποια προβλήματα. Οι χρόνοι που χρειάστηκε ο Η/Υ για να λύσει το κάθε πρόβλημα αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου. Αν ο Η/Υ χρειάστηκε $63{,}5$ λεπτά, για να λύσει όλα τα προβλήματα εκτός από το πρώτο, 127 λεπτά να λύσει όλα τα προβλήματα, εκτός από το τελευταίο και $31{,}5$ λεπτά, για να λύσει όλα τα προβλήματα εκτός από τα δύο πρώτα, να βρείτε πόσα προβλήματα κατάφερε να λύσει ο συγκεκριμένος Η/Υ.	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Υπάρχει μαθηματικός κανόνας που συνδέει την περίμετρο ενός τετραγώνου με την περίμετρο του αμέσως «προηγούμενου» τετραγώνου; • Σε τι προβλέψεις ή γενικεύσεις μπορεί να οδηγήσει αυτός ο μαθηματικός κανόνας;
4. **Υπολογισμοί στον κύκλο** (Μ7.3) Προσεγγίζουν το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου με κανονικά πολύγωνα και αποδεικνύουν τους τύπους υπολογισμού μήκους και εμβαδού κύκλου, εμβαδού κυκλικού τομέα, κυκλικού τμήματος και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων.	4.1 Αποδεικνύουν τύπους υπολογισμού μήκους κύκλου, εμβαδού κυκλικού δίσκου, μήκους τόξου, εμβαδού κυκλικού τομέα και εμβαδού κυκλικού τμήματος. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Κύκλος ✓ Κανονικά πολύγωνα ✓ Ακολουθίες ✓ Όριο ακολουθίας **Νέες Έννοιες:** ✓ Απόδειξη τύπων μέτρησης κύκλου	**Παραδείγματα:** *Απόδειξη τύπων μέτρησης κύκλου* • Να προσεγγίσετε το μήκος κύκλου με τη χρήση κανονικών πολυγώνων και να αποδείξετε το μήκος του είναι $2\pi R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. • Να προσεγγίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με τη χρήση κανονικών πολυγώνων και να αποδείξετε το εμβαδόν του είναι πR^2, όπου R η ακτίνα του κύκλου.	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω εφαρμογίδιο δίνεται κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Με τον δρομέα n αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών του κανονικού πολυγώνου. Καθώς το n αυξάνεται, ποια παρατήρηση μπορούμε να κάνουμε για τον τρόπο με τον οποίο τα κανονικά πολύγωνα «προσεγγίζουν» το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου;
	4.2 Εφαρμόζουν τύπους υπολογισμού μήκους κύκλου, εμβαδού κυκλικού δίσκου, μήκους τόξου, εμβαδού κυκλικού τομέα και εμβαδού κυκλικού τμήματος στην επίλυση προβλήματος.	**Παραδείγματα:** *Μέτρηση κύκλου* • Το μήκος ενός κύκλου είναι $14\pi\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του πιο πάνω κύκλου, του οποίου το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι $45°$. • Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $4\ cm$, όπως φαίνεται	

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td>Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Κανονικά πολύγωνα
✓ Τύποι μέτρησης κύκλου
Νέες Έννοιες:
✓ Εφαρμογή τύπων μέτρησης κύκλου</td>
<td>στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.
</td>
<td rowspan="2">

</td>
</tr>
<tr>
<td>4.3 Υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων.
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Κανονικά πολύγωνα
✓ Τύποι μέτρησης κύκλου
✓ Τύποι υπολογισμού περιμέτρου και εμβαδού ευθύγραμμων επίπεδων σχημάτων
Νέες Έννοιες:
✓ Εφαρμογή τύπων για τον υπολογισμό εμβαδού και περιμέτρου μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων</td>
<td>Παράδειγμα:
Εμβαδόν – Περίμετρος μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων
• Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $α$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.

• Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ με $ΑΒ = 5\ cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.</td>
</tr>
</table>

			*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες πληροφορίες αντλώ από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο; • Τι μπορεί να μου δείξει το εφαρμογίδιο, που δεν θα μπορούσα να το δω εύκολα;

<table>
<tr><th colspan="4">ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)</th></tr>
<tr><th colspan="4">ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ</th></tr>
<tr><th>ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</th><th colspan="3">ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td rowspan="2">Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:</td><td colspan="2">Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης</td></tr>
<tr><td>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</td><td>Μαθηματικές Πρακτικές</td></tr>
<tr><td>1. Υπολογισμός μέτρων θέσης και διασποράς και καταλληλότητα κάθε μέτρου (ΣΠ5.4**)
Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή, εύρος, τυπική απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού).</td><td>1.1 Υπολογίζουν μέτρα θέσης και επιλέγουν το κατάλληλο μέτρο.
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Υπολογισμός επικρατούσας τιμής, διαμέσου και μέσου όρου
Νέες Έννοιες:
✓ Επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης, ανάλογα με τις τιμές συγκεκριμένης μεταβλητής</td><td>Παράδειγμα:
Επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης
• Μια εταιρεία κατασκευής παπουτσιών διεξάγει έρευνα σε δείγμα 1200 ενηλίκων για το μέγεθος των παπουτσιών τους. Ποιο μέτρο θέσης (επικρατούσα τιμή, διάμεσος, μέση τιμή) είναι, κατά τη γνώμη σας, καταλληλότερο ώστε η εταιρεία να μπορέσει να κατασκευάσει τα κατάλληλα μεγέθη παπουτσιών για τις ανάγκες του ενήλικα καταναλωτή;</td><td>ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος
Κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω. Ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου (κάνω επαλήθευση και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη).
Παράδειγμα: Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής πλαστικών σακουλιών εργάζονται 16 εργάτες οι οποίοι αμείβονται με €8 την ώρα, τρεις επιστάτες με €12 την ώρα και ο υπεύθυνος παραγωγής που αμείβεται με €36 την ώρα.
(α) Να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή, τη διάμεσο και τη μέση τιμή των 20 ατόμων που εργάζονται στο εργοστάσιο.
(β) Να αναφέρετε, αιτιολογώντας την</td></tr>
</table>

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. ΣΠ5.4) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			απάντησή σας, ποιο από τα τρία πιο πάνω μέτρα θέσης θα επιλέγατε: i. αν ρωτηθείτε ποιο είναι το τυπικό ωρομίσθιο στο εργοστάσιο ii. αν ο εργοστασιάρχης ήθελε να πείσει κάποιο να εργοδοτηθεί στο εργοστάσιο του *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Είναι η απάντησή μου λογική για τα τρία μέτρα θέσης; • Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
	1.2 Υπολογίζουν μέτρα διασποράς και επιλέγουν το κατάλληλο μέτρο σε συγκεκριμένα δεδομένα **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Υπολογισμός εύρους, διασποράς και τυπικής απόκλισης **Νέες Έννοιες:** ✓ Επιλογή κατάλληλου μέτρου διασποράς	**Παραδείγματα:** *Επιλογή κατάλληλου μέτρου διασποράς* • Να αναφέρετε ένα πλεονέκτημα και ένα μειονέκτημα του εύρους τιμών μιας μεταβλητής. • Δίνονται τα σύνολα τιμών δύο μεταβλητών X, Y: $X: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 9, 10$ $Y: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 10$ Να υπολογίσετε το εύρος τιμών των δύο μεταβλητών και να αναφέρετε ποια μεταβλητή παρουσιάζει μεγαλύτερη «μεταβλητότητα», σχολιάζοντας την καταλληλότητα του εύρους.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.** *Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η αριθμητική τιμή της διακύμανσης (διασποράς) είναι δύσκολο να ερμηνευθεί. Για αυτό το λόγο, επιλέγουμε την τυπική απόκλιση. Να αναφέρετε κατά πόσο συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον πιο πάνω ισχυρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Γιατί δεν υπάρχει περίπτωση να προκύψει αρνητικός αριθμός στα δύο αυτά μέτρα διασποράς; • Ποιο είναι το βασικό μειονέκτημα της διακύμανσης, σε σχέση με την τυπική απόκλιση;

2. **Σύγκριση δύο πληθυσμών με βάση μέτρα θέσης και διασποράς** (ΣΠ5.5)
Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.

2.1 Συγκρίνουν δύο πληθυσμούς, με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:
- ✓ Υπολογισμός μέτρων θέσης
- ✓ Υπολογισμός μέτρων διασποράς
- ✓ Μελέτη απλών διαγραμμάτων, όπως ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα και ιστόγραμμα

Νέες Έννοιες:
- ✓ Σύγκριση δύο πληθυσμών ανάλογα με τη μεταβλητότητά τους

Παραδείγματα:
Σύγκριση δύο πληθυσμών ανάλογα με τη μεταβλητότητά τους
- Η εταιρεία λεωφορείων της πόλης μας καταγράφει κάθε μέρα τον αριθμό των καθυστερημένων δρομολογίων. Ο πίνακας παρουσιάζει τα στοιχεία για τους μήνες Φεβρουάριο και Μάιο του ίδιου έτους.

Φεβρουάριος:

6	7	5	4	3	0	0	1	2	5
9	1	5	4	3	6	7	1	0	0
0	0	1	2	1	0	4	1		

Μάιος:

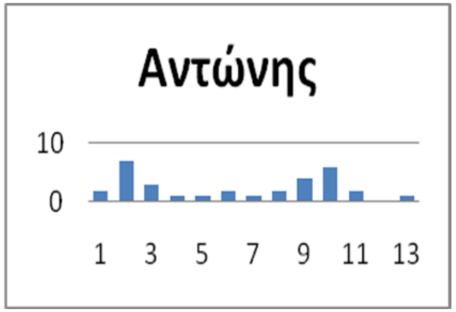
3	0	1	0	3	1	2	3	4	9
2	0	4	1	1	2	3	4	1	5
7	2	1	2	3	0	4	1	0	2
1									

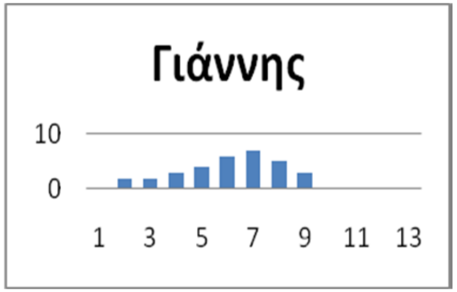
i. Να υπολογίσετε τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος του αριθμού των καθυστερημένων δρομολογίων για κάθε μήνα.

ii. Πιστεύετε ότι η εταιρεία έχει βελτιώσει το επίπεδο των υπηρεσιών της μεταξύ Φεβρουαρίου – Μαΐου; Να εξηγήσετε γιατί.

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη
Χρησιμοποιώ τα μέτρα θέσης και διασποράς, για να συγκρίνω δείγματα και να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα: Ο Αντώνης και ο Γιάννης είναι πωλητές μεταχειρισμένων αυτοκινήτων. Τα επόμενα ραβδογράμματα δείχνουν τον αριθμό των εβδομαδιαίων πωλήσεων που έκαναν για ένα χρονικό διάστημα.





(α) Να υπολογίσετε:
- i) τη μέση τιμή
- ii) την επικρατούσα τιμή
- iii) το εύρος των πωλήσεων για τους δυο πωλητές

(β) Ποιος πώλησε περισσότερα αυτοκίνητα;

(γ) Ποιον θεωρείτε ως τον καλύτερο πωλητή και γιατί;

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Απαντώ στις ερωτήσεις:

Ποιες έννοιες-ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στο πρόβλημα;
Ποιο μέτρο μας επιτρέπει να απαντήσουμε στην τελευταία ερώτηση;
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Χρονογράμματα και προβλέψεις σε στατιστικά δεδομένα (ΣΠ6.4) Κάνουν προβλέψεις στη συμπεριφορά στατιστικών δεδομένων ενός πληθυσμού, εξετάζοντας τη μεταβολή των μέτρων θέσης και διασποράς μιας μεταβλητής σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα (χρονογράμματα).</td>
<td>3.1 Προβλέπουν τη συμπεριφορά στατιστικών δεδομένων σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.

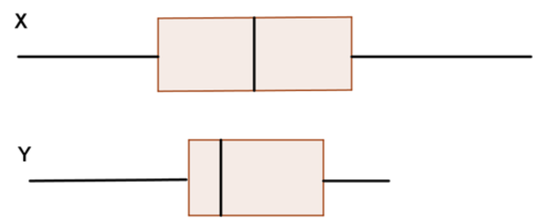
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Έννοια ποσοστού
✓ Πίνακας συχνοτήτων
Νέες Έννοιες:
✓ Πρόβλεψη σε στατιστικά δεδομένα μιας μεταβλητής σε χρονόγραμμα</td>
<td>Παράδειγμα:
Πρόβλεψη συμπεριφοράς στατιστικών δεδομένων

Τα δεδομένα του πίνακα δείχνουν το ποσοστό των μητέρων ανάλογα με την ηλικία τους σε μια Ευρωπαϊκή χώρα για περίοδο 30 ετών.

<table>
<tr><th>Ηλικία μητέρας</th><th>1941 %</th><th>1951 %</th><th>1961 %</th><th>1971 %</th></tr>
<tr><td>$15-19$</td><td>4,3</td><td>4,3</td><td>7,2</td><td>10,6</td></tr>
<tr><td>$20-24$</td><td>25,4</td><td>27,6</td><td>30,8</td><td>36,5</td></tr>
<tr><td>$25-29$</td><td>31,0</td><td>32,2</td><td>30,7</td><td>31,4</td></tr>
<tr><td>$30-34$</td><td>22,1</td><td>20,7</td><td>18,8</td><td>14,1</td></tr>
<tr><td>$35-39$</td><td>12,7</td><td>11,5</td><td>9,6</td><td>5,8</td></tr>
<tr><td>$40-44$</td><td>4,2</td><td>3,4</td><td>2,7</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>$45-49$</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr>
</table>
(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μητέρων για τα έτη 1941, 1961 και 1991 (να χρησιμοποιήσετε λογισμικό, π.χ. Excel).

(β) Τι συμπεραίνετε για την ηλικία των μητέρων;</td>
<td>ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.
Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς. Αναπτύσσω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.
Παράδειγμα: Μια επιχείρηση καταγράφει τα συνολικά κέρδη της ανά τετράμηνο σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ.
<table>
<tr><th colspan="4">2008</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>24,1</td><td>26,3</td><td>28,4</td><td>20,4</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="4">2009</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>29,3</td><td>31,9</td><td>35,2</td><td>28,4</td></tr>
</table>
Να εκτιμήσετε τα κέρδη της επιχείρησης τα έτη (α) 2010, (β) 2007, χρησιμοποιώντας κινούμενο μέσο όρο τεσσάρων σημείων.
Απαντώ στην ερώτηση:

Ποια μαθηματική ορολογία θα χρησιμοποιήσω, για να εξηγήσω στους άλλους τον τρόπο απόδειξης της πιο πάνω σχέσης;
</td>
</tr>
</table>

4. **Σύγκριση δύο δειγμάτων με φυλλογραφήματα και θηκογράμματα** (ΣΠ7.3) Συγκρίνουν δύο ή περισσότερα δείγματα με χρήση φυλλογραφημάτων (Stem and Leaf plots) και θηκογραμμάτων (Boxplots).	4.1 Συγκρίνουν δύο δείγματα με χρήση φυλλογραφημάτων ή θηκογραμμάτων. **Νέες Έννοιες:** ✓ Μελέτη και ερμηνεία φυλλογραφημάτων ή θηκογραμμάτων	**Παράδειγμα:** *Σύγκριση δύο δειγμάτων με χρήση φυλλογραφημάτων* • Το επόμενο φυλλογράφημα διπλής όψης δείχνει τα παραπτώματα που χρεώθηκε κάθε ομάδα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος για τα έτη 2008 και 2009. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζετε ανάμεσα στις δυο χρονιές; **2008** | | **2009** **11** | **4** | | **3** | **7** **332** | **3** | **233** **8865** | **2** | **889** **44331110** | **2** | **001112223** **987776665** | **1** | **56888899** **321** | **1** | **22444** **7** | **0** | **69**	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παράδειγμα:** Στα πιο κάτω θηκογράμματα παρουσιάζονται οι κατανομές δύο μεταβλητών Χ και Υ .Να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των δύο κατανομών.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιες πληροφορίες* μου δίνει το κάθε θηκόγραμμα σχετικά με το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος; • Σε ποιο από τα δύο υπάρχει συμμετρία και τι σημαίνει αυτό;