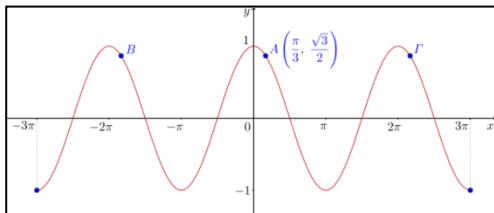
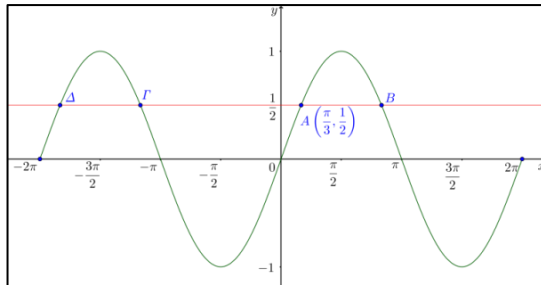


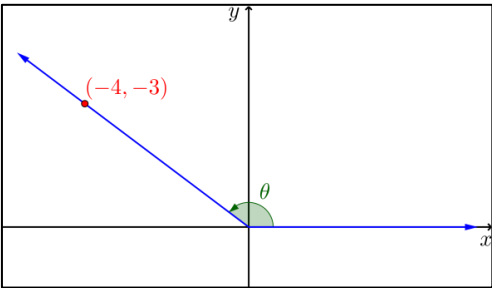
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

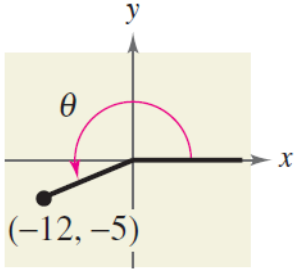
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Ιδιότητες περιοδικής συνάρτησης (Α6.3**) Μελετούν ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων (άρτια, περιττή, περιοδική, κτλ.) και εντοπίζουν τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.	1.1 Χρησιμοποιούν την περιοδικότητα των συναρτήσεων $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\phi x$, για να επιλύουν προβλήματα. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνιάς ✓ Παράλληλη μεταφορά σχήματος Νέες Έννοιες ✓ Περιοδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A, $A \subseteq \mathbb{R}$ ✓ Περίοδος συνάρτησης	Παράδειγμα: Χρήση ιδιοτήτων περιοδικής συνάρτησης • Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-3\pi, 3\pi]$.  (α) Να αναφέρετε την περίοδο της συνάρτησης και να εξηγήσετε τη σημασία της. (β) Το σημείο A είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \sigma\upsilon\nu x$ με συντεταγμένες $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Ποια είναι	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τις γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων, για να κατανοήσω προβλήματα. Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \eta\mu x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$.  Με τη βοήθεια της πιο πάνω γραφικής παράστασης, να υπολογίσετε τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

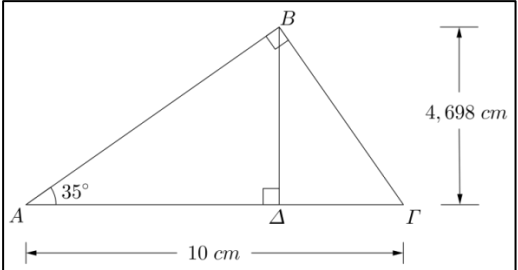
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Α6.3) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

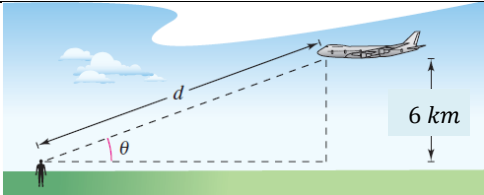
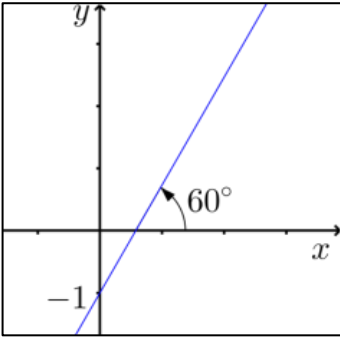
		η τετμημένη των σημείων B και Γ, αν είναι γνωστό ότι έχουν την ίδια τεταγμένη με το σημείο A;	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι η σχέση μεταξύ των σημείων A, B, Γ και Δ; • Πώς σχετίζονται τα σημεία αυτά με τις λύσεις της εξίσωσης; • Ποιες ιδιότητες της συνάρτησης μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;
2. Τριγωνομετρικός κύκλος (Α6.10) Ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κατασκευάζουν τη γραφική τους παράσταση (εξετάζουν αν είναι άρτιες ή περιττές ή/και περιοδικές) και αποδεικνύουν τριγωνομετρικές ταυτότητες.	2.1 Κατασκευάζουν γωνίες σε κανονική θέση και να αναφέρουν γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά, όταν αυτές τοποθετηθούν σε κανονική θέση. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Κατασκευή γωνίας ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνιάς Νέες Έννοιες ✓ Γωνία σε κανονική θέση με αρχική πλευρά το θετικό ημιάξονα των τετμημένων	Παράδειγμα: <i>Γωνίες σε κανονική θέση</i> • Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω γωνίες σε κανονική θέση και να αναφέρετε ποιες από αυτές έχουν την ίδια τελική πλευρά: (α) 135° (β) -90° (γ) 660° (δ) 270°	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Οργανώνω τις έννοιες της Τριγωνομετρίας, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.</i> Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Στη συνέχεια, να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο 224°.
	2.2 Εκφράζουν γωνίες από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μέτρο γωνίας Νέες Έννοιες ✓ Μονάδες μέτρησης τόξου ✓ Τόξο ενός ακτινίου ✓ Ακτίνιο	Παραδείγματα: <i>Έκφραση γωνιών από μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα</i> • Να εκφράσετε τις πιο κάτω γωνίες σε ακτίνια: (α) 30° (β) -60° (γ) 315° (δ) 930° • Να εκφράσετε τις πιο κάτω γωνίες σε μοίρες: (α) $\frac{\pi}{2}$ (β) $\frac{11\pi}{6}$ (γ) $-\frac{2\pi}{3}$ (δ) 7π	

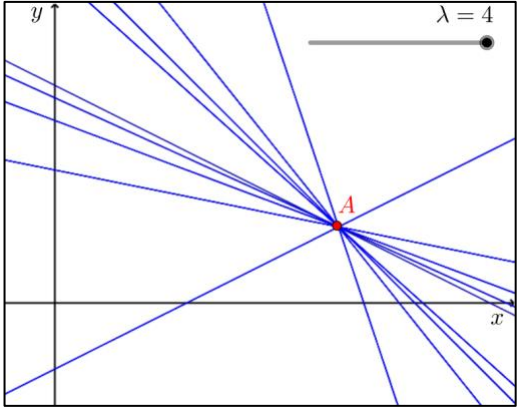
	2.3 Υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας που είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε ορθογώνιο τρίγωνο Νέες Έννοιες ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας που είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση. ➤ Ημίτονο γωνίας θ ($\eta\mu\theta$) ➤ Συνημίτονο γωνίας θ ($\sigma\upsilon\nu\theta$) ➤ Εφαπτομένη γωνίας θ ($\epsilon\varphi\theta$) ➤ Συνεφαπτόμενη γωνίας θ ($\sigma\varphi\theta$) ➤ Τέμνουσα γωνίας θ ($\tau\epsilon\mu\theta$) ➤ Συντέμνουσα της γωνίας θ ($\sigma\tau\epsilon\mu\theta$)	Παράδειγμα: <i>Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση</i> • Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται μία γωνία θ τοποθετημένη σε κανονική θέση. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ. 	τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$; • Ποια παρατήρηση πρέπει να κάνω, για να βρω το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας που έχει μέτρο 224°; ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: (α) Η παράσταση $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$ είναι ίση με: A. 0 B. $-2\eta\mu\theta$ Γ. $-2\sigma\upsilon\nu\theta$ Δ. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$ (β) Αν $\tau\epsilon\mu\theta < 0$ και $\epsilon\varphi\theta < 0$, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν αυτή τοποθετηθεί σε κανονική θέση; A. 1° B. 2° Γ. 3° Δ. 4° (γ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ έχει περίοδο 2π. Ποια είναι η περίοδος της $g(x) = \eta\mu 4x$; A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ Γ. 2π Δ. 4π (δ) Οι λύσεις της εξίσωσης $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	2.4 Χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να: ➤ υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ➤ βρίσκουν το πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ➤ εντοπίζουν σε ποιο	Παράδειγμα: <i>Τριγωνομετρικός κύκλος</i> • Να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό κύκλο, για να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: (α) $\eta\mu 180^\circ$ (β) $\sigma\upsilon\nu(-270^\circ)$ (γ) $\epsilon\varphi 720^\circ$ (δ) $\eta\mu \frac{3\pi}{2}$ • Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών	

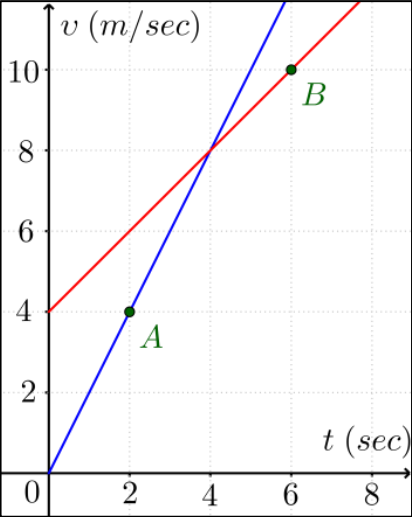
	τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά γωνίας Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Περιοδική συνάρτηση Νέες Έννοιες ✓ Τριγωνομετρικός κύκλος	με μέτρο: (α) 122° (β) -57° (γ) 541° (δ) $-\frac{7\pi}{12}$ • Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ, αν: (α) $\eta\mu\theta > 0$, (β) $\sigma\upsilon\eta\theta > 0$, $\sigma\phi\theta > 0$ $\sigma\tau\epsilon\mu\theta < 0$ (γ) $\epsilon\phi\theta > 0$, (δ) $\sigma\tau\epsilon\mu\theta > 0$, $\tau\epsilon\mu\theta < 0$ $\epsilon\phi\theta < 0$ • Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή των παραστάσεων: (α) $y = 4 + 2\sigma\upsilon\eta x, x \in [0, \pi]$ (β) $y = 3 - \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}$ (γ) $y = 1 - 2\eta\mu x + \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}$	είναι οι: A. $x = \frac{\pi}{3}$ B. $x = -\frac{\pi}{3}$ Γ. $x = -\frac{\pi}{3}$ Δ. $x = \frac{\pi}{3}$ $x = \frac{2\pi}{3}$ $x = \frac{2\pi}{3}$ $x = \frac{\pi}{3}$ $x = \frac{5\pi}{3}$ (ε) Στο πιο κάτω σχήμα, η γωνία θ είναι τοποθετημένη σε κανονική θέση.  Η $\epsilon\phi\theta$ είναι ίση με: A. -12 B. -5 Γ. $\frac{5}{12}$ Δ. $\frac{12}{5}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;
3. Τριγωνομετρικές εξισώσεις (A6.16) Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.	3.1 Επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης ✓ Τριγωνομετρικός κύκλος ✓ Περιοδική συνάρτηση Νέες έννοιες ✓ Γενική λύση	Παράδειγμα: Επίλυση τριγωνομετρικής εξίσωσης • Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3}\eta\mu x + 1 = 0, x \in [0^\circ, 360^\circ]$	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις. • Παράδειγμα: Να υπολογίσετε τη γωνία θ, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, αν: $\frac{\eta\mu(360^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(270^\circ - \theta) \cdot \sigma\phi(180^\circ + \theta)}{\sigma\upsilon\eta(180^\circ + \theta) \cdot \epsilon\phi(90^\circ - \theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

	τριγωνομετρικής εξίσωσης ✓ Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε συγκεκριμένο διάστημα		Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορώ να απλοποιήσω την πιο πάνω εξίσωση; • Υπάρχει κάποιος μαθηματικός κανόνας, για να απλοποιήσω την εξίσωση και να βρω τις λύσεις της; • Τι παρατηρώ, αν το πρόβλημα είχε ως δεδομένο ότι $180^\circ < \theta < 270^\circ$;
	3.2 Εφαρμόζουν τις σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Τριγωνομετρικός Κύκλος Νέες έννοιες ✓ Αναγωγή τριγωνομετρικού αριθμού στο α' τεταρτημόριο	Παράδειγμα: Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών • Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας: (α) $\eta\mu 128^\circ$ (β) $\sigma\upsilon\nu 262^\circ$ (γ) $\epsilon\phi 387^\circ$ (δ) $\tau\epsilon\mu(-133^\circ)$	
4. Τριγωνομετρικές ταυτότητες (Α6.17) Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.	4.1 Αποδεικνύουν τριγωνομετρικές ταυτότητες. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες Νέες έννοιες ✓ Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων με την βοήθεια των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών και βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων	Παράδειγμα: Απόδειξη τριγωνομετρικών ταυτοτήτων • Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες: (α) $\sigma\phi x \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (β) $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$ (γ) $(1 - \sigma\upsilon\nu^2 \omega) \cdot (1 + \sigma\phi^2 \omega) = 1$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων Επεξηγώ την σκέψη μου και αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές ιδέες. Παραδείγματα: Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες: (α) $\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x} = (\tau\epsilon\mu x - \epsilon\phi x)^2$ (β) $\frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu x - \sigma\phi x} = \sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\phi x$ (γ) $\frac{1-\epsilon\phi^2 \theta}{1+\epsilon\phi^2 \theta} = 1 - 2\eta\mu^2 \theta$ Απαντώ στην ερώτηση: • Πώς ελέγχω την ορθότητα της απάντησής μου;

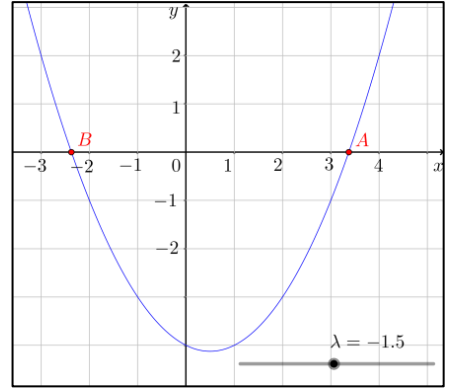
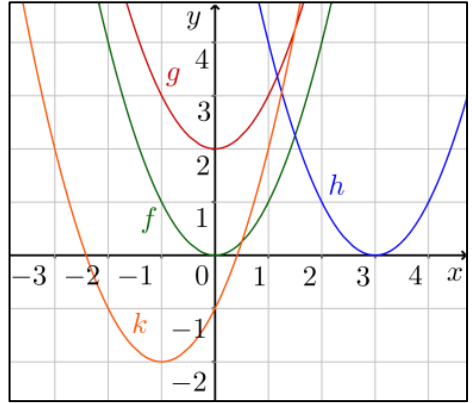
	4.2 Χρησιμοποιούν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, για να υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες Νέες έννοιες ✓ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών με την βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων	Παραδείγματα: Χρήση βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων • Να υπολογίσετε τη γωνία θ, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, αν: $\frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)}{\eta\mu(270^\circ - \theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ • Αν $\sigma\tau\epsilon\mu\theta = -\frac{5}{4}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.	
5. Επίλυση προβλήματος (Α6.18) Εφαρμόζουν τις έννοιες και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.	5.1 Χρησιμοποιούν τις έννοιες της Τριγωνομετρίας, για να επιλύουν προβλήματα. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες Νέες έννοιες ✓ Επίλυση προβλήματος με τη χρήση τριγωνομετρίας	Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος • Με βάση τα δεδομένα του πιο κάτω σχήματος, να υπολογίσετε: (α) το μήκος της $A\Delta$ (β) το μήκος της AB (γ) το μήκος της AG 	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Ένα αεροπλάνο πετά σε ύψος 6 km και περνά ακριβώς πάνω από έναν παρατηρητή. Αν θ είναι η γωνία που βλέπει ο παρατηρητής το αεροπλάνο σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε την απόσταση d του αεροπλάνου από τον παρατηρητή, όταν: (α) $\theta = 30^\circ$ (β) $\theta = 60^\circ$ (γ) $\theta = 135^\circ$

			 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;
6. Εξίσωση ευθείας (A5.6) Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας και την αναπαριστούν γραφικά, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.	6.1 Βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας, όταν γνωρίζουν ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Κλίση και γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Νέες Έννοιες ✓ Γωνία που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα των τετμημένων.	Παράδειγμα: <i>Εξίσωση ευθείας</i> • Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παραδείγματα: (α) Η Μαριάννα ισχυρίζεται ότι η εξίσωση της ευθείας που φαίνεται στο πιο κάτω διάγραμμα, είναι η $\sqrt{3}x - 2y - 2 = 0$. Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός της είναι αληθής. 

	6.2 Υπολογίζουν την προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα των τετμημένων, όταν γνωρίζουν την εξίσωση της ευθείας. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Κλίση γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. ✓ Γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ϵ) με τον άξονα των τετμημένων. Νέες έννοιες ✓ Υπολογισμός γωνίας ευθείας με άξονα των τετμημένων	Παράδειγμα: Υπολογισμός γωνίας ευθείας με άξονα των τετμημένων • Να υπολογίσετε την προσανατολισμένη γωνία θ, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, που σχηματίζει η ευθεία $x - \sqrt{3}y = 2$ με τον άξονα των τετμημένων.	(β) Ο Ανδρέας ισχυρίζεται ότι η εξίσωση $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y - 3 - 18\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει εξίσωση ευθείας για όλες τις πραγματικές τιμές του λ. Ισχυρίζεται, επίσης, ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από ένα σταθερό σημείο. Οι πιο πάνω ισχυρισμοί διατυπώθηκαν μέσα από την μελέτη της παρακάτω γραφικής παράστασης.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς ελέγχω την ορθότητα της απάντησής μου; • Πώς θα μπορούσα να παρουσιάσω ένα αντιπαράδειγμα; • Τι είναι το ίδιο και τι είναι διαφορετικό στο αντιπαράδειγμα που δίνω σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα;
	6.3 Βρίσκουν την εξίσωση μίας ευθείας, όταν είναι γνωστή η κλίση και ένα σημείο από το οποίο διέρχεται ή όταν είναι γνωστά δύο σημεία από τα οποία διέρχεται. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Εξίσωση ευθείας ✓ Κλίση ευθείας ✓ Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος	Παραδείγματα: Εξίσωση Ευθείας • Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία: (α) διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$ (β) διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(4, -3)$ (γ) διέρχεται από το σημείο $A(2, -2)$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων • Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 1)$, $B(7, -5)$ και $\Gamma(-3, 3)$. Να	

	Νέες έννοιες ✓ Υπολογισμός εξίσωσης ευθείας, η οποία: (α) διέρχεται από συγκεκριμένο σημείο και έχει κλίση λ (β) διέρχεται από 2 σημεία (γ) διέρχεται από το σημείο A και σχηματίζει γωνία με τον άξονα των τετμημένων	βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$.	
7. Μέτρο γωνίας δύο ευθειών – Σχετική θέση δύο ευθειών (A5.7) Διερευνούν τη θέση δύο ευθειών στο επίπεδο και ανακαλύπτουν κριτήρια καθετότητας και παραλληλίας.	7.1 Να υπολογίζουν το μέτρο της γωνίας δύο ευθειών. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Εξίσωση ευθείας ✓ Κλίση ευθείας ✓ Γωνία σε κανονική θέση Νέες έννοιες ✓ Γωνία δύο τεμνόμενων ευθειών (θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά την ε_1 και τελική πλευρά την ε_2)	Παραδείγματα: Γωνία Δύο Ευθειών • Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: (α) $\varepsilon_1: 2x - y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 3y + 3 = 0$ (β) $\varepsilon_1: 2x - y + 10 = 0$ και $\varepsilon_2: y = 4$ (γ) $\varepsilon_1: 2x - 2y + 9 = 0$ και $\varepsilon_2: x = 2$ • Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3, 2)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(4, -1)$.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να καταλαβαίνω τον κόσμο. Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δύο ποδηλάτων A και B.
	7.2 Να διερευνούν τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο και να εφαρμόζουν τα κριτήρια καθετότητας και παραλληλίας δύο ευθειών στο επίπεδο στην επίλυση προβλήματος.	Παραδείγματα: <i>Παράλληλες - Κάθετες Ευθείες</i> • Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία: (α) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 7)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x - 4y = 5$ (β) διέρχεται από το σημείο $A(0, 4)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία $3x + y = -1$	

	Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Κλίση ευθείας ✓ Γωνία δύο τεμνόμενων ευθειών Νέες έννοιες ✓ Συνθήκη παραλληλίας και καθετότητας ευθειών	• Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB, όταν $A(0, 5)$ και $B(6, -3)$ • Να προσδιορίσετε την τιμή του μ, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: \mu x - (\mu - 12)y + \mu - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + (3\mu - 1)y + \mu = 0$ να είναι παράλληλες. • Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Οι συντεταγμένες των κορυφών του A και Γ είναι $(2, 3)$ και $(6, 5)$, αντίστοιχα. Να βρείτε: (α) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του (β) την εξίσωση της $B\Delta$ (γ) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ	(α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο για κάθε ποδήλατο ξεχωριστά. (β) Ποια είναι η σημασία της κλίσης της κάθε ευθείας; (γ) Σε ποια χρονική στιγμή τα δύο ποδήλατα έχουν την ίδια ταχύτητα; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιες πληροφορίες μπορώ να αντλήσω από την κάθε ευθεία; • Θα ήταν χρήσιμο σε αυτήν την περίπτωση να χρησιμοποιήσω κατάλληλο εφαρμογίδιο;
8. Γραφική παράσταση της $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ (A5.9) Αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και αναγνωρίζουν πώς προκύπτει από την παραβολή $y = ax^2$ με μετατόπιση.	8.1 Μετατοπίζουν τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2$ κατάλληλα, ώστε να προκύπτει η γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Έννοια - αναπαράσταση συνάρτησης ✓ Πεδίο ορισμού - σύνολο τιμών συνάρτησης ✓ Είδος ριζών της $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης $y = ax^2, a \neq 0$ (Ορισμός –	Παραδείγματα: <i>Γραφική Παράσταση – Στοιχεία της $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$</i> • Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση, όταν η παραβολή $y = 4x^2$ μετατοπίζεται κατά: (α) 1 μονάδα πάνω (β) 3 μονάδες δεξιά • Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^2$ θα συμπέσει, με κατάλληλες μετατοπίσεις, με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: (α) $g(x) = -2x^2 + 5$ (β) $h(x) = -2x^2 + 4x + 3$ • Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας, την κορυφή και τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω παραβολών. Στη	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ), για να αναπαραστήσω μαθηματικές καταστάσεις.</i> Παράδειγμα: (α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $(\lambda + 2) \cdot x^2 - (\lambda + 2) \cdot x - 4$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ. (β) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda + 2) \cdot x^2 - (\lambda + 2) \cdot x - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ακολουθώ, να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματά σας με τη χρήση του πιο κάτω εφαρμογιδίου.

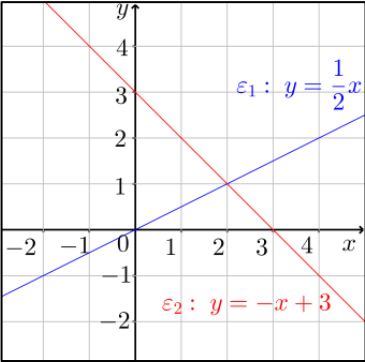
	Στοιχεία) ✓ Παράλληλη μεταφορά γεωμετρικού σχήματος Νέες έννοιες ✓ Γραφική Παράσταση – Στοιχεία της $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ ✓ Ερμηνεία οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης	συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά. (α) $f_1(x) = x^2 - 2$ (β) $f_2(x) = x^2 - 5x + 4$ (γ) $f_3(x) = -(x - 2)^2$ (δ) $f_4(x) = (x + 1)^2 - 4$	 Απαντώ στην ερώτηση: • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο να επιβεβαιώσω τα αποτελέσματά μου;
9. Χρήση μετασχηματισμών (Α6.5) Κατασκευάζουν συναρτήσεις, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x + h), f(x) + k, cf(x), f(cx)$.	9.1 Βρίσκουν τους τύπους και κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $f(x + h), f(x) + k, cf(x), f(cx)$. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός – στοιχεία – γραφική παράσταση συνάρτησης $y = ax^2, a \neq 0$ ✓ Παράλληλη μεταφορά γεωμετρικού σχήματος Νέες έννοιες ✓ Εύρεση τύπου συνάρτησης $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \delta$ που προκύπτει από μετασχηματισμό της $y = ax^2$	Παράδειγμα: Εύρεση τύπου συνάρτησης μέσω μετασχηματισμών • Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -2x^2$. Να βρείτε τις συναρτήσεις με τύπους $g(x) = f(x + 2), h(x) = f(x) - 4, k(x) = 3f(x), p(x) = f(-2x)$ και να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις, επεξηγώντας πλήρως πώς αυτές προκύπτουν μέσα από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f.	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και γενικεύω. Παράδειγμα: Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h και k.  Με δεδομένο ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = x^2$, να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g, h και k, αν είναι μετατοπίσεις της f.

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι παρατηρώ για τη σχέση που συνδέει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, h και k; • Με ποιο τρόπο μπορώ να χρησιμοποιήσω το πιο πάνω διάγραμμα, για να βρω τους τύπους των συναρτήσεων g, h και k;
10.Ανισώσεις – Συστήματα β' βαθμού (Α6.12) Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α' και β' βαθμού, καθώς και συστήματα δύο και τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	10.1 Μελετούν το πρόσημο του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση εξίσωσης β' Βαθμού ✓ Υπολογισμός διακρίνουσας και ✓ Είδος ριζών Νέες έννοιες ✓ Πρόσημο τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ στις διάφορες περιοχές του $\mathbb{R}$	Παραδείγματα: Πρόσημο τριωνύμου $y = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ • Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x: (α) $x^2 - 10x + 9$ (β) $-3x^2 + x - 7$ (γ) $-9 + 6x - x^2$ (δ) $4 - 9x^2$ • Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 - 8x - 3, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω αριθμών: (α) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (β) $f(5)$ (γ) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ (δ) $f(-2016)$	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα. Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: (α) Η εξίσωση με ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -3$ είναι η: A. $x^2 - x - 6 = 0$ B. $x^2 - x + 6 = 0$ Γ. $x^2 + x + 6 = 0$ Δ. $x^2 + x - 6 = 0$ (β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -2x^2 + x + 6, x \in \mathbb{R}$. Είναι: A. $f(2) = 0, f(1) < 0$ B. $f(1) > 0, f(0) < 0$ Γ. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0, f(9) > 0$ Δ. $f(2) = 0, f(9) < 0$ (γ) Οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ είναι οι: A. $(x, y) = (0, 0)$ B. $(x, y) = (4, 0)$ $(x, y) = (0, 4)$ $(x, y) = (0, 4)$
	10.2 Επιλύουν ανισώσεις και συστήματα β' βαθμού. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Πρόσημο τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ στις διάφορες περιοχές του $\mathbb{R}$	Παραδείγματα: Επίλυση ανίσωσης β' βαθμού συστήματος β' βαθμού • Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$ • Για ποιες πραγματικές τιμές του x	(γ) Οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ είναι οι: A. $(x, y) = (0, 0)$ B. $(x, y) = (4, 0)$ $(x, y) = (0, 4)$ $(x, y) = (0, 4)$

	✓ Ανισώσεις α' βαθμού ✓ Λύση συστήματος Νέες έννοιες ✓ Επίλυση ανίσωσης β' βαθμού ✓ Επίλυση συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους β' βαθμού	αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις; (α) $x^2 - 49 \leq 0$ (β) $(x - 1)(x - 2) > 0$ (γ) $x^2 + 1 > 0$ (δ) $-x^2 - 12 < 0$ • Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x - 6}$ • Για ποιες τιμές της παραμέτρου k το τριώνυμο $x^2 - (k + 2) \cdot x + k + 5$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματική τιμή του x;	Γ. $(x, y) = (0, 0)$ Δ. $(x, y) = (0, 0)$ $(x, y) = (4, 0)$ $(x, y) = (4, 4)$ (δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ είναι: Α. $[-1, 2]$ Β. $(-1, 2)$ Γ. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ Δ. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτά τα προβλήματα;
11. Τύποι Vietta (A6.13) Διερευνούν το είδος και το πλήθος των ριζών τριωνύμου δεύτερου βαθμού και τις μεταξύ τους σχέσεις (τύποι Vietta) και τις εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων.	11.1 Βρίσκουν το είδος των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, το άθροισμα και το γινόμενό τους, χωρίς να την επιλύουν. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού Νέες Έννοιες ✓ Τύποι Vietta: (α) Άθροισμα ριζών $S = x_1 + x_2$ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ (β) Γινόμενο ριζών $P = x_1 \cdot x_2$ της εξίσωσης	Παραδείγματα: <i>Είδος – Άθροισμα – Γινόμενο των Ριζών</i> x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ • Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 5x + 2 = 0$. (α) Να βρείτε το είδος των ριζών της x_1, x_2. (β) Σε πόσα σημεία η παραβολή με τύπο $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων; (γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων: i. $x_1 + x_2$ ii. $x_1 \cdot x_2$ iii. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ iv. $x_1^2 + x_2^2$ • Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (k - 1)x - 3 = 0$, $k \in \mathbb{R}$ με ρίζες x_1, x_2. Να υπολογίσετε την τιμή	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τα στοιχεία της παραβολής $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, για να κατανοήσω προβλήματα. Παράδειγμα: Το κάθε σχοινί που ενώνει δύο πασσάλους στο πιο κάτω γεφύρι, περιγράφεται από την εξίσωση $y = \frac{1}{9000}x^2 - \frac{7}{15}x + 500$, όπου τα x και y μετρούνται σε πόδια (ft). Να υπολογίσετε το ύψος h του σχοινιού από το δρόμο στο χαμηλότερο του σημείο. 

	$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$	του k , ώστε να ισχύει: (α) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ (β) $x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 0$	Απαντώ στις ερωτήσεις: - Ποια είναι η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων x και y; - Πώς σχετίζεται το πρόβλημα αυτό με τα στοιχεία της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$; - Ποια στοιχεία της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;
	11.2 Κατασκευάζουν εξισώσεις β' βαθμού, αν είναι γνωστές οι ρίζες τους x_1, x_2. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Τύποι Vietta: (α) Άθροισμα ριζών $S = x_1 + x_2$ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ (β) Γινόμενο ριζών $P = x_1 \cdot x_2$ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ Νέες έννοιες ✓ Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού με την βοήθεια του τύπου $x^2 - Sx + P = 0$	Παράδειγμα: Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού Να γράψετε μία εξίσωση β' βαθμού με ρίζες: (α) 2 και $-\frac{1}{2}$ (β) $3 - \sqrt{7}$ και $3 + \sqrt{7}$	
12.Παραγοντοποίηση τριωνύμου (Α6.14) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τον τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$.	12.1 Μετατρέπουν τριώνυμο της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ σε γινόμενα πρωτοβάθμιων παραγόντων. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού Νέες έννοιες ✓ Παραγοντοποίηση τριωνύμων της μορφής	Παράδειγμα: Παραγοντοποίηση τριωνύμων της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: (α) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$ (β) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 9x + 4}$	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα. Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ είναι: A. $[-2, 1]$ B. $(-2, 1]$

	$ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$		Γ. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ Δ. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
13.Ανισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού (Α6.15) Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού.	13.1 Επιλύουν ανισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού και κλασματικές ανισώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση ανίσωσης α' και β' βαθμού ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών Νέες έννοιες ✓ Επίλυση ανίσωσης ανωτέρου του β' βαθμού ✓ Επίλυση κλασματικής ανίσωσης	Παράδειγμα: <i>Επίλυση ανίσωσης ανωτέρου του β' βαθμού, κλασματικής ανίσωσης</i> • Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις: (α) $(x^2 + 1)(x^3 + 8) \geq 0$ (β) $x^3 - 4x \leq 4 - x^2$ (γ) $\frac{x}{x+1} < 0$ (δ) $\frac{3x-2}{x^2+x} > 0$	(β) Το κλάσμα $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x}$ ισούται με: A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{x-1}{x}$ Γ. $\frac{x-1}{x-4}$ Δ. $\frac{x-4}{x}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτά τα προβλήματα;
	13.2 Επιλύουν προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση ανίσωσης. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση ανίσωσης α' βαθμού, β' βαθμού, ανωτέρου του β' βαθμού, κλασματικής ανίσωσης Νέες έννοιες ✓ Προβλήματα που ανάγονται σε επίλυση ανίσωσης	Παράδειγμα: <i>Επίλυση προβλήματος</i> • Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$	
14.Επίλυση – Διερεύνηση εξίσωσης πρώτου βαθμού – γραμμικού συστήματος (Α6.12) Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις α' και β' βαθμού, καθώς και συστήματα δύο και	14.1 Επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις πρώτου βαθμού. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Επίλυση εξίσωσης α' βαθμού με έναν άγνωστο ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση γραμμικού	Παράδειγμα: <i>Λύση – Διερεύνηση εξίσωσης α' βαθμού</i> • Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ: (α) $(\lambda - 3)x = \lambda^2 - \lambda - 6$ (β) $(\lambda^2 - 16)x = \lambda^2 + 4\lambda$	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (μία γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να καταλαβαίνω τις έννοιές τους.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των

τριών εξισώσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Νέες έννοιες ✓ Παραμετρική εξίσωση της μορφής $ax = \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ ✓ Διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης		ευθειών ε_1 και ε_2. (α) Να βρείτε τη λύση του συστήματος των ευθειών ε_1 και ε_2 αλγεβρικά και γραφικά. (β) Να γράψετε μια τρίτη εξίσωση με αγνώστους τα x και y, ώστε να δημιουργείται μαζί με τις δύο προηγούμενες εξισώσεις ένα σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους, το οποίο να είναι συμβιβαστό. Είναι η εξίσωση αυτή μοναδική; Να επεξηγήσετε, δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα.
14.2 Επιλύουν προβλήματα με βάση το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Παραμετρική εξίσωση της μορφής $ax = \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ ✓ Διερεύνηση παραμετρικής εξίσωσης Νέες έννοιες ✓ Λύση προβλημάτων που σχετίζονται με το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης α' βαθμού	Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος • Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η εξίσωση $3kx - 21 = k^2x - 7k$: (α) να έχει μοναδική λύση, την $x = 1$ (β) να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ (γ) να είναι αόριστη στο $\mathbb{R}$		
14.3 Επιλύουν και να διερευνούν γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.		Παράδειγμα: <i>Λύση – Διερεύνηση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους</i> • Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες πληροφορίες έχω; • Θα ήταν χρήσιμο σε αυτήν την περίπτωση να χρησιμοποιήσω κατάλληλο λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας; ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Ποια είναι η τιμή του γ, αν ισχύουν τα πιο κάτω;

	Νέες έννοιες ✓ Διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους		$\begin{cases} 2a + \beta = 26 \\ a + 2\beta + \gamma = 32 \\ a + \beta + \gamma = 24 \end{cases}$
14.4	Επιλύουν προβλήματα με βάση το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους Νέες έννοιες ✓ Λύση προβλημάτων που σχετίζονται με το πλήθος των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.	Παράδειγμα: <i>Επίλυση προβλήματος</i> • Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε το σύστημα $\begin{cases} kx + 2y = 7 \\ 4x - 3y = \lambda + 1 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{R}$.	<i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ τη λογικότητα της απάντησής μου;
14.5	Αναγνωρίζουν κατά πόσο ένα σύστημα εξισώσεων είναι συμβιβαστό και να επιλύουν προβλήματα με βάση την έννοια του συμβιβαστού συστήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λύση και Διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους	Παράδειγμα: <i>Συμβιβαστό Σύστημα</i> • Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω συστήματα είναι συμβιβαστά: (α) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$	

	Νέες έννοιες ✓ Συμβιβαστό σύστημα		
	14.6 Επιλύουν γραμμικά συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους Νέες Έννοιες ✓ Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους	Παράδειγμα: <i>Λύση Γραμμικού Συστήματος Τριών Εξισώσεων με Τρεις Αγνώστους</i> • Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 8z = 2 \\ -3x + y + 3z = -4 \end{cases}$	
	14.7 Επιλύουν προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Γραμμικό σύστημα Νέες έννοιες ✓ Επιλύουν προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικού συστήματος	Παράδειγμα: <i>Επίλυση προβλήματος</i> • Να υπολογίσετε τα a, β και γ, αν για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ισχύει $f(-2) = 4, f(2) = -8$ και $f(-3) = 2$.	

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΡΙΘΜΟΙ)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

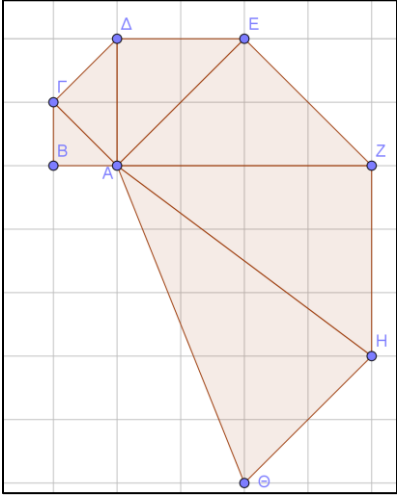
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Έννοια-ιδιότητες νιοστής ρίζας (Αρ6.2**) Ορίζουν την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού a και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $v \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+$.	1.1. Ορίζουν τη νιοστή ρίζα πραγματικού μη-αρνητικού αριθμού a ($\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$). Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ορισμός τετραγωνικής ρίζας μη-αρνητικού αριθμού a ($a \geq 0$) ✓ Ορισμός κυβικής ή τρίτης ρίζας μη-αρνητικού αριθμού a ($a \geq 0$) Νέες Έννοιες ✓ Νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$).	Παραδείγματα: <i>Ορισμός νιοστής ρίζας</i> • Να γράψετε μια ισοδύναμη πρόταση για τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z : (α) $x = \sqrt[5]{2}$ (β) $y = \sqrt[7]{3}$ (γ) $z = \sqrt[3]{10}$ • Ποιος αριθμός, όταν υψωθεί στη 10^{η} δύναμη, μας δίνει 3; Να δώσετε την ακριβή μορφή του αριθμού. Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παραδείγματα: (α) Να ερμηνεύσετε με λόγια τον πραγματικό αριθμό $a = \sqrt[5]{200}$. (β) Να εκτιμήσετε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών βρίσκεται το $a = \sqrt[5]{200}$. Να αναφέρετε σε ποιο από τους δύο αριθμούς βρίσκεται πιο «κοντά», αιτιολογώντας την απάντησή σας. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς ο ορισμός της νιοστής ρίζας με βοηθά στην ερμηνεία του αριθμού $a = \sqrt[5]{200}$; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε εκτίμηση του

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Αρ6.2) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			$a = \sqrt[5]{200}$; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;
	1.2. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες νιοστών ριζών μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας πραγματικού μη αρνητικού αριθμού $\sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$ ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Αν $a > 0, \beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $\mu, \nu \neq 0$, τότε: ➤ $a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}$ ➤ $\frac{a^\mu}{a^\nu} = a^{\mu-\nu}$ ➤ $(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$ ➤ $a^\nu \cdot \beta^\nu = (a \cdot \beta)^\nu$ ➤ $\frac{a^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu$ Νέες Έννοιες ✓ Ιδιότητες ριζών: Αν $a, \beta \geq 0$ και $\mu, \nu > 0$: ➤ $\sqrt[n]{a^\nu} = a$ ➤ $\sqrt[n]{a\beta} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{\beta} \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}}$ ➤ $\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{a}} = \sqrt[n\mu]{a}$, ➤ $\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{a^{\mu\rho}}} = \sqrt[n]{a^\rho}$	Παράδειγμα: <i>Απόδειξη ιδιοτήτων νιοστών ριζών και εφαρμογή τους</i> • Αν $a \geq 0$ και ν, κ θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι: i. $\sqrt[n]{a^\nu \cdot \beta} = a \cdot \sqrt[n]{\beta}$ ii. $(\sqrt[n]{a})^\kappa = \sqrt[n]{a^\kappa}$ • Να βρείτε ακέραιους x, y ώστε να ισχύει $\sqrt[5]{192} = x \cdot \sqrt[5]{y}$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγγω τη λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς $A = \sqrt[3]{2}$ και $B = \sqrt[10]{10}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς μπορώ να αναπαραστήσω τα δεδομένα του προβλήματος με ισοδύναμο τρόπο; • Γιατί δεν είναι συγκρίσιμοι οι αριθμοί, όπως έχουν δοθεί; • Ποια ιδιότητα θα με βοηθούσε ώστε να έχουμε τους δύο αριθμούς με τον ίδιο δείκτη (ή τον ίδιο εκθέτη);

2. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη (Αρ6.4) Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.	2.1 Ορίζουν τη δύναμη μη-αρνητικού αριθμού a με ρητό εκθέτη $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, ως $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$ και μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^\mu}$, $a > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[\nu]{a}$, $\nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες ριζών Νέες Έννοιες ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a με ρητό εκθέτη ($a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a, όπου a δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[\nu]{a^\mu}$, $\nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$). Σημείωση ✓ Ειδικά, ορίζουμε $a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$, $a \geq 0, \nu \in \mathbb{N}$.	Παραδείγματα: <i>Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη</i> • Να γράψετε ισοδύναμες προτάσεις για τις πιο κάτω δυνάμεις, όταν $x > 0$: (α) x^3 (β) x^{-3} (γ) $x^{\frac{1}{3}}$ (δ) $x^{-\frac{1}{3}}$ • Να υπολογίσετε τους αριθμούς: (α) $8^{\frac{2}{3}}$ (β) $9^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ • Να εκφράσετε το γινόμενο $2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^\mu}$.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και να κατανοήσω καλύτερα τις ιδιότητες των ριζών.</i> Παραδείγματα: Ένας μαθητής έγραψε τον αριθμό $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους όπως φαίνεται πιο κάτω: i. $a^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^\mu)^{\frac{1}{\nu}}$ ii. $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu$ Να γράψετε τι «προσφέρει» ο κάθε τρόπος γραφής και σε ποιες ισοδύναμες ιδιότητες μπορούμε να καταλήξουμε. Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό $8^{\frac{2}{3}}$, για να στηρίξετε τον ισχυρισμό σας και να αποφασίσετε ποιος από τους δύο τρόπους γραφής δίνει απλούστερο αποτέλεσμα. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς γράφεται ο αριθμός $x^{\frac{1}{\nu}}$, $x > 0$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $(x^\mu)^{\frac{1}{\nu}}$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $\left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu$;
	2.2. Μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^\mu}$, όπου a μη-αρνητικός πραγματικός	Παραδείγματα: <i>Μετατροπή δυνάμεων με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^\mu}$</i> • Να εκφράσετε σε μορφή δύναμης τα πιο κάτω:	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, θετικού αριθμού υψωμένου σε δύναμη για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις</i>

	αριθμός και $n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Ιδιότητες τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Νέες Έννοιες ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a με ρητό εκθέτη ($a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a, όπου a δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[n]{a^{\mu}}, n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}$)	(α) $\sqrt[3]{a}$ (β) $\sqrt[4]{\beta^3}$ (γ) $\sqrt[6]{\gamma^4}$ • Να εκφράσετε στη μορφή $\sqrt[n]{a^{\mu}}$ τα πιο κάτω: (α) $x^{\frac{4}{3}}$ (β) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$ (γ) $\left(2^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ (δ) $3^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 5^{\frac{\mu}{\nu}}$	μεταξύ τους. Παραδείγματα: Να ελέγξετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους: (α) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ και $x^2, x > 0$. (β) $\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}$ και $\sqrt{a^3}$. (γ) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ και $\sqrt[4]{10^3}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ισχύει η ιδιότητα $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί; • Ισχύει η ιδιότητα $(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί;
3. Μετασχηματισμός αριθμητικών παραστάσεων (Αρ6.9) Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.	3.1. Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ιδιότητες ριζών Νέες Έννοιες ✓ Ισοδύναμες κλασματικές παραστάσεις με άρρητο και ρητό παρονομαστή ✓ Μετασχηματισμός παράστασης με άρρητο	Παραδείγματα: Μετατροπή παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή. • Να μετατρέψετε τις παραστάσεις $B = \frac{10}{\sqrt{2}}$ και $\Gamma = \frac{21}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ σε ισοδύναμές τους με ρητό παρονομαστή. • Αν $x, y > 0$ και $x \neq y$, να αποδείξετε ότι: ➤ $\frac{2+\sqrt{x}}{4-x} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ ➤ $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x + y + \sqrt{xy}$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς. Παραδείγματα: (α) Να εξηγήσετε γιατί οι πιο κάτω παραστάσεις είναι ισοδύναμες και να αναφέρετε τις διαφορές τους. i. $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ και $2 \cdot \sqrt[3]{3}$ ii. $\frac{24}{\sqrt{11}-3}$ και $12 \cdot (\sqrt{11} + 3)$

	παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.		(β) Πώς μπορείτε να βρείτε ισοδύναμη παράσταση με ρητό παρονομαστή με την $\frac{2\sqrt{3}}{6-\sqrt{18}}$; Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα; • Ποια γνωστή ταυτότητα είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί ώστε να απαλείψει τα ριζικά της μορφής $a \pm b\sqrt{\gamma}$;
4. Τιμή αριθμητικής παράστασης με n –οστές ρίζες (Αρ6.11) Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.	4.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και τους μετασχηματισμούς από αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν παραστάσεις και να υπολογίζουν την τιμή τους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αριθμητικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε	Παραδείγματα: Υπολογισμός αριθμητικής τιμής παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών • Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $A = 64^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{6}}$. • Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt{12} + \sqrt{48} + \sqrt{108}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt{2}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$ (β) $\sqrt{\lambda}$ με $\lambda \in \mathbb{N}$ • Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt[3]{5}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$ (β) $\sqrt[3]{\lambda}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου $ABΓΔΕΖΗΘΑ$ αν το κάθε ένα τετραγώνάκι έχει εμβαδόν ίσο με 1 cm^2. 

	ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή. Νέες Έννοιες ✓ Απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων ✓ Τιμή αριθμητικών παραστάσεων		Απαντώ στις ερωτήσεις: • Αν το $AB = BG = 1\text{ cm}$, ποιο γνωστό θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το AG και GD; • Γιατί το $AG \perp GD$;
5. Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης (Αρ6.12) Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.	5.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς από παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή τους. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή	Παράδειγμα: Υπολογισμός τιμής αλγεβρικών παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών • Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 + \sqrt{3}$: (α) να υπολογίσετε την παράσταση $x^2 - y^2$ (β) να δείξετε ότι οι παραστάσεις $A = 3x^2 - 6x + 3$ και $B = 2y^2 - 4y + 2$ είναι ίσες	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ την έννοια της ισοδύναμης παράστασης με ρητό παρονομαστή και τις ιδιότητες ριζών, για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις μεταξύ τους. Παραδείγματα: Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A, όταν $x = 5$ μπορεί να πάρει τη μορφή $a\sqrt{6}$, $a \in \mathbb{N}$. $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορεί το κάθε κλάσμα να γραφεί ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή. • Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα. Ποιος είναι ο κοινός παρονομαστής του αθροίσματος;

	Νέες Έννοιες ✓ Απλοποίηση αλγεβρικής παράστασης ✓ Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης		
6. Επίλυση προβλημάτων με n –οστές ρίζες (Αρ6.13) Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη στην επίλυση προβλημάτων.	6.1 Μεταφράζουν λεκτικά προβλήματα σε αλγεβρικές παραστάσεις με n –οστές ρίζες πραγματικού αριθμού και δυνάμεις με ρητό εκθέτη και τα επιλύουν. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μετάφραση λεκτικών αναπαραστάσεων σε αριθμητικές και αλγεβρικές εκφράσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας ($\sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$) ✓ Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{m}{n}}$, όπου $a > 0, m, n \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη Νέες έννοιες ✓ Επίλυση προβλημάτων με νιοστές ρίζες	Παραδείγματα: <i>Εφαρμογής των ιδιοτήτων στους αριθμούς με εκθέτη ρητό αριθμό</i> • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην $9^{\text{η}}$ δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $A = \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ στην μορφή $2^{\frac{a}{b}}$ και στη μορφή $\sqrt[n]{\gamma}$ με $a, b, \gamma, n \in \mathbb{N}$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ των πιο κάτω άρρητων αριθμών είναι φυσικός αριθμός. $\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{20+\sqrt{399}}$ <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς μπορούμε να απλοποιήσουμε τους όρους του αθροίσματος; • Γιατί είναι χρήσιμο το ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή στο πρόβλημα μας;
7. Επίλυση εξίσωσης (Αρ6.15) Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.	7.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων	Παραδείγματα: <i>Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες.</i> • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $x^{\frac{2}{3}} = 8$	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Ποσό €20000 ανατοκίσθηκε για ένα χρονικό διάστημα προς 3% και έγινε €23185,48. Να

	με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να επιλύουν εξισώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Δυνάμεις πραγματικού αριθμού ✓ Διαδικασία επίλυσης εξίσωσης βαθμού $\nu \geq 2$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή Νέες έννοιες ✓ Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες	(β) $2(x - 1)^{-\frac{3}{2}} = 54$ • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $2x^6 + 7 = 1465$ (β) $5(x + 1)^4 = 80$ • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην $9^{\text{η}}$ δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε τον ν συναρτήσει των K_0, K_1 και τ, αν ισχύει $K_0(1 + \tau)^\nu = K_1$.	υπολογίσετε το χρονικό διάστημα. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του πρώτου χρόνου, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι €20000 και το αντίστοιχο επιτόκιο 3%; • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του δεύτερου χρόνου; • Τι πρέπει να προσέξω για το αρχικό ποσό του δεύτερου χρόνου; • Ποιος γενικός τύπος προκύπτει για το ποσό στο τέλος του ν χρόνου και ποια είναι η αντίστοιχη εξίσωση στο πρόβλημα;
8. Ιδιότητες διάταξης (Αρ5.14) Αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της σχέσης διάταξης στο σύνολο	8.1. Αναγνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες διάταξης των πραγματικών αριθμών και να μπορούν να τις αποδεικνύουν. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός ανίσωσης α' βαθμού ✓ Επίλυση ανίσωσης α'	Παράδειγμα: <i>Απόδειξη βασικών ιδιοτήτων</i> • Να αποδείξετε ότι: (α) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$ (β) Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}, \mu < \nu$, τότε $\begin{cases} \sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}, a > 1 \\ \sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{a}, 0 < a < 1 \end{cases}$	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας: (α) Αν $a \geq 10, \beta \geq 20$, τότε $3\alpha + 2\beta \geq 60$

των πραγματικών αριθμών (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, συμμετρικά στοιχεία σε μία πράξη, ουδέτερο στοιχείο σε μια πράξη) και διερευνούν κατά πόσο μια πράξη είναι κλειστή στο σύνολο που ορίζεται.	βαθμού με χρήση ιδιοτήτων όπως: ➤ Πρόσθεση-αφαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ➤ Πολλαπλασιασμός-διαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ➤ Πολλαπλασιασμός - διαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, με αλλαγή της φοράς της ανίσωσης Νέες Έννοιες ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών: ➤ $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$ ➤ Αν a, β ομόσημοι, τότε $a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$. ➤ Αν $a, \beta > 0, \nu \in \mathbb{N}$, τότε $a > \beta \Leftrightarrow a^\nu > \beta^\nu$. ➤ Αν $a, \beta > 0, \nu \in \mathbb{N}$, τότε $a > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a} > \sqrt[\nu]{\beta}$. ➤ Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}, \mu < \nu$, τότε $\begin{cases} \sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}, a > 1 \\ \sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{a}, 0 < a < 1 \end{cases}$		(β) $\sqrt[3]{100} < \sqrt[4]{100}$ (γ) $\text{An } a^3 < 2a^2\beta \Rightarrow a < 2\beta$ (δ) $\text{An } x < -1 \Rightarrow x^4 < 1$ (ε) $\text{An } a < \beta \Rightarrow a - 2 < \beta - 8$ <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιες ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στις πιο πάνω ερωτήσεις; • Ποια κατάλληλα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιώ, για να απορρίψω έναν ισχυρισμό που θεωρώ λανθασμένο;
--	--	--	---

	8.2. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες διάταξης, για να συγκρίνουν πραγματικούς αριθμούς. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών Νέες έννοιες ✓ Σύγκριση πραγματικών αριθμών με τη χρήση ιδιοτήτων διάταξης	Παραδείγματα: Εφαρμογή ιδιοτήτων για σύγκριση πραγματικών αριθμών • Αν $a, \beta \in \mathbb{R}, a < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: (α) $A = \frac{1}{2}(3a + 8)$ και $B = \frac{1}{2}(3\beta + 8)$ (β) $\Gamma = 4 - 3a$ και $\Delta = 4 - 3\beta$ • Αν $5 < \kappa < 8$ και $-2 < \lambda < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: (α) $2\kappa + \lambda$ (β) $\kappa - 3\lambda$ (γ) $3\kappa - \lambda$ (δ) $\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση Ερμηνεύω ένα πραγματικό πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα. Παράδειγμα: Οικόπεδο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις $40m$ επί $30m$. Αν στις μετρήσεις των διαστάσεων το σφάλμα μέτρησης δεν ξεπερνά τα $20cm$, να υπολογίσετε το πιθανό σφάλμα στη μέτρηση: (α) της περιμέτρου (β) του εμβαδού του ορθογώνιου παραλληλογράμμου Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες ανισοτικές σχέσεις μπορώ να χρησιμοποιήσω, ώστε να «οριοθετήσω» τις πραγματικές διαστάσεις του ορθογώνιου; • Ποιες ιδιότητες πρέπει να χρησιμοποιήσω, ώστε να απαντήσω στο πρόβλημα.
--	---	--	--

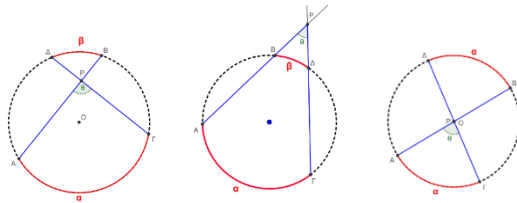
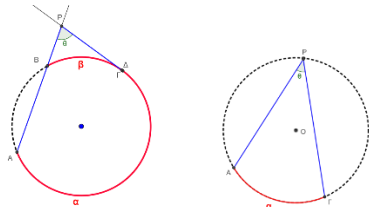
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

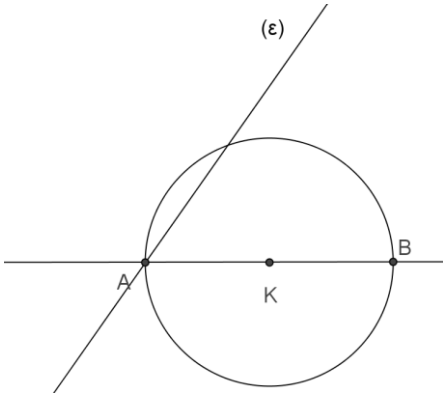
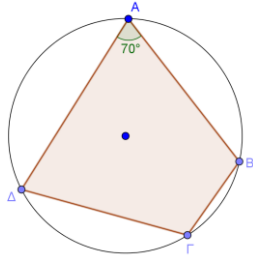
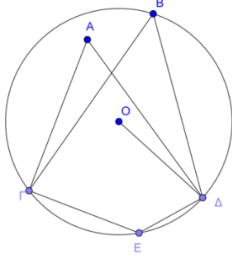
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Επαγωγικός συλλογισμός (Γ5.1**) Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.	1.1. Διερευνούν σχέσεις και καταλήγουν σε γενικεύσεις από ειδικές περιπτώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός κύκλου ✓ Στοιχεία κύκλου (χορδή, διάμετρος, τόξο, κυκλικός δίσκος, επίκεντρη γωνία και το αντίστοιχο τόξο της, μέτρο τόξου, σχέση επίκεντρης και αντίστοιχου τόξου, εφαπτομένη κύκλου) ✓ Θέσεις σημείου ως προς κύκλο ✓ Θέσεις ευθείας ως προς κύκλο ✓ Απόστημα χορδής	Παραδείγματα: Επαγωγικός συλλογισμός • Να αποδείξετε ότι μία επίκεντρη γωνία σε κύκλο (O, R) είναι διπλάσια από κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο. • Γιατί κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή; • Γιατί κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι μικρότερη από 180°;	

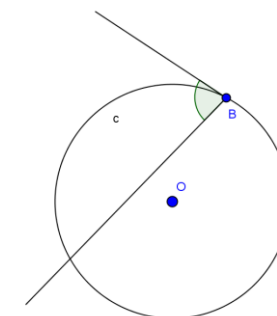
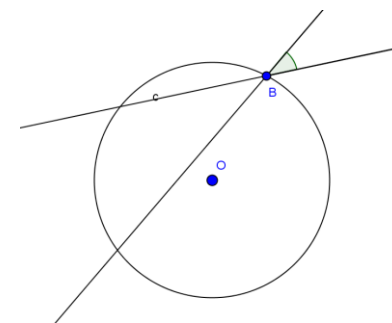
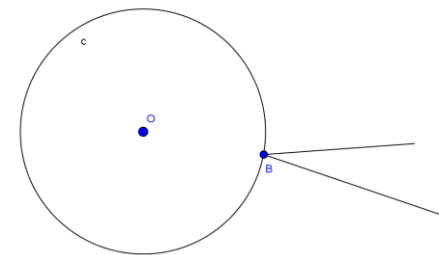
ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό
Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.
Παραδείγματα:
(α) Να αναφέρετε το Θεώρημα για τη σχέση που συνδέει την εγγεγραμμένη γωνία με την αντίστοιχη επίκεντρη.
(β) Να αναφέρετε τη σχέση μεταξύ της γωνίας θ η οποία σχηματίζεται μεταξύ δύο χορδών και των αντίστοιχων τόξων α και β , όπως εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση στα πιο κάτω σχήματα.
(γ) Γιατί τα δύο πρώτα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν ως επέκταση του Θεωρήματος που αναφέρεται στη σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας;
(δ) Αν στο 1° σχήμα το μέτρο του τόξου α

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Γ5.1) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

	Νέες Έννοιες ✓ Επαγωγική διαδικασία γενίκευσης		είναι 80° και το μέτρο του τόξου β είναι 50°, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ. <u>Σχήμα (1)</u> <u>Σχήμα (2)</u> <u>Σχήμα (3)</u>  <u>Σχήμα (4)</u> <u>Σχήμα (5)</u>  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια «βοηθητική» γραμμή πρέπει να φέρουμε, ώστε να συνδέσουμε τη γωνία θ με τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα α και β; • Πώς μπορούμε μέσω του Σχήματος (1) να δούμε το Σχήμα (3) ως ειδική περίπτωση του;
2. Παραγωγικός συλλογισμός (Γ5.2) Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.	2.1. Διερευνούν κατά πόσο ισχύουν γενικές σχέσεις (προτάσεις) σε ειδικές περιπτώσεις (συνθήκες) Προαπαιτούμενες γνώσεις	Παράδειγμα: Παραγωγικός συλλογισμός • Στο πιο κάτω σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία (ε) περνά από το A. Να κατασκευάσετε την προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία (ε)	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και χρησιμοποιώ γενικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους για να κατανοήσω προβλήματα.

	✓ Βασικά θεωρήματα, προτάσεις από: ✓ Γωνίες σε κύκλο (εγγεγραμμένες - επίκεντρες) ✓ Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης ✓ Ομοιότητα τριγώνων Νέες Έννοιες ✓ Χρήση γενικών προτάσεων για σε επιμέρους προτάσεις.	αιτιολογώντας την απάντησή σας. 	Παράδειγμα: Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το μέτρο της γωνίας A είναι 70°. Να υπολογίσετε το μέτρο της απέναντι γωνίας Γ του τετραπλεύρου.  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι η σχέση της γωνίας A ως προς τον κύκλο; • Ποιες βοηθητικές γραμμές πρέπει να φέρουμε ώστε να αξιοποιήσουμε το είδος της γωνίας A με το σχετικό θεώρημα; • Ποια είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία της Γ;
3. Εγγεγραμμένη γωνία – Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης (Γ5.7) Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος, κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής,	3.1. Ορίζουν και αναγνωρίζουν εγγεγραμμένες γωνίες. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Μέτρο τόξου ✓ Τέμνουσες κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Εγγεγραμμένη γωνία ✓ Μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας	Παράδειγμα: <i>Ορισμός εγγεγραμμένης γωνίας</i> • Να ονομάσετε δύο εγγεγραμμένες γωνίες, αναφέροντας σε κάθε περίπτωση το αντίστοιχο τόξο στο οποίο βαίνει. 	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. <i>Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς, λαμβάνοντας υπόψη τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Ένας μαθητής ορίζει την εγγεγραμμένη γωνία ως εξής: «είναι η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου». Ο καθηγητής στη συνέχεια του κάνει τρία σχήματα για να υποδείξει στο μαθητή ότι κάτι έχει παραλείψει. Να δώσετε τον ορθό ορισμό.

κυκλικός τομέας,
κυκλικό τμήμα,
σχετικές θέσεις
ευθείας και κύκλου,
σχετικές θέσεις δύο
κύκλων, μέτρο τόξου
και γωνίας, επίκεντρες
γωνίες, εγγεγραμμένες
γωνίες, γωνία που
σχηματίζεται από
χορδή και
εφαπτομένη).



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Γιατί τα πιο πάνω σχήματα αποτελούν αντιπαραδείγματα, για να υποδείξουν την ατέλεια στον ορισμό;
- Με ποιο τρόπο μπορούν να με οδηγήσουν στην ορθότητα της διατύπωσης του ορισμού;

3.2. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες εγγεγραμμένων γωνιών:

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.
- Το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.
- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα ίσων κύκλων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- ✓ Εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία
- ✓ Μέτρο τόξου
- ✓ Ημικύκλιο

Νέες Έννοιες

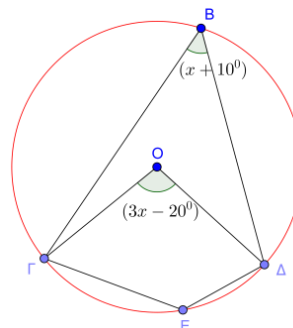
- ✓ Σχέση μέτρων εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας
- ✓ Σχέση μέτρου εγγεγραμμένης γωνίας και μέτρου αντίστοιχου τόξου
- ✓ Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο

Παράδειγμα:

Σχέση εγγεγραμμένης-επίκεντρης γωνίας

- Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε:

- (α) την τιμή του x
- (β) το μέτρο του τόξου $\widehat{ΓΕΔ}$
- (γ) το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΓΕΔ}$

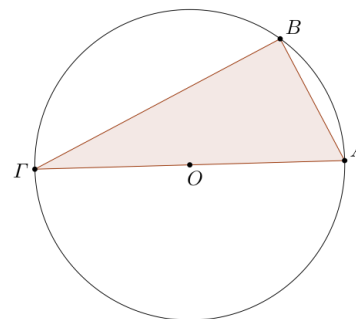


Παράδειγμα:

Γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο

- Στο πιο κάτω σχήμα, η $ΑΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου (O, OA) και $\widehat{ΒΑΓ} = 3 \cdot \widehat{ΒΓΑ}$.

- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.
- (β) Να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου AB (του μικρότερου)



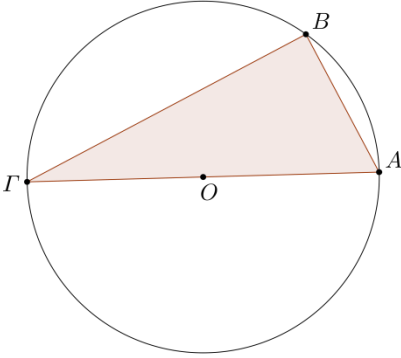
ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος

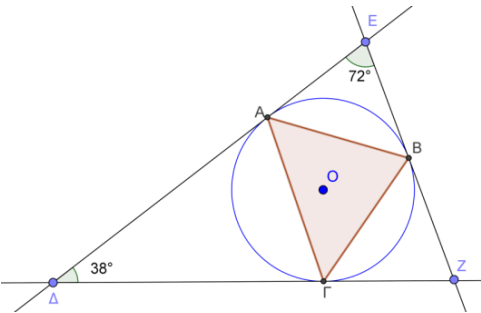
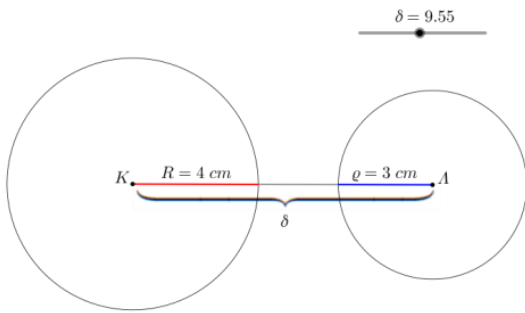
Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.

Παράδειγμα: Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, ο κύκλος με διάμετρο $ΑΒ$ τέμνει την υποτείνουσα $ΒΓ$ στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο $Μ$ διέρχεται από το μέσο του $ΑΓ$.

Απαντώ στις ερωτήσεις

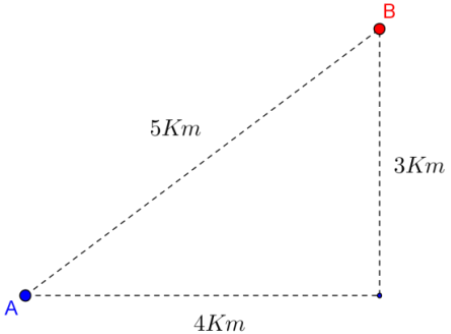
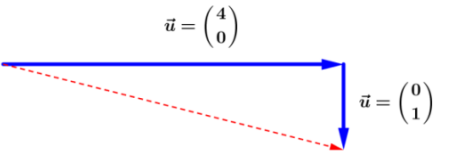
- Στο σχήμα που θα κατασκευάσετε ποια είναι η ορθή γωνία;
- Πώς θα κατασκευάσουμε την ορθή γωνία σε σημείο που αποτελεί άκρο της διαμέτρου;
- Τι πρέπει να επισημάνουμε όταν φέρουμε την εφαπτομένη στο $Μ$;

	✓ Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο		
	3.3. Διερευνούν τη σχέση ανάμεσα σε τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων ευθειών. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Παράλληλες ευθείες ✓ Σχέσεις με γωνίες που σχηματίζονται από Τρίτη ευθεία που τέμνει δύο παράλληλες ευθείες. Νέες Έννοιες ✓ Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων (ή του ίδιου κύκλου) είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα. ✓ Μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών περιέχονται ίσα τόξα.	Παράδειγμα: Σχέση εγγεγραμμένων γωνιών - τόξα μεταξύ παράλληλων χορδών • Στο πιο κάτω σχήμα, να φέρετε παράλληλη από το B προς την $ΑΓ$. Αν Δ είναι η τομή της παράλληλης ευθείας από το B και του κύκλου, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $ΑΒΔΓ$. 	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, για να κατανοήσω προβλήματα. Παράδειγμα: Το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ «φαίνεται» υπό γωνία 60° από το σημείο A. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν και άλλες πιθανές θέσεις σημείων από τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα να φαίνεται επίσης υπό γωνία 60°. Απαντώ στις ερωτήσεις • Που πρέπει να βρίσκονται τα ζητούμενα σημεία; • Ποια κατασκευή πρέπει να γίνει ώστε να βοηθήσει στην εύρεση σημείων τα οποία θα φαίνονται από τη συγκεκριμένη γωνία των 60°;
	3.4. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Χορδή κύκλου ✓ Εγγεγραμμένη γωνία ✓ Εφαπτόμενη κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Γωνία που σχηματίζει μία χορδή ενός κύκλου με την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής αυτής	Παράδειγμα: Γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη • Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, όταν γνωρίζουμε τις γωνίες $\hat{A} = 38^\circ$ και $E = 72^\circ$ του τριγώνου $ΔΕΖ$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και ιδιότητες, για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα. Παραδείγματα: (α) Να αποδείξετε ότι μια εφαπτόμενη κύκλου σε σημείο του M είναι παράλληλη προς μια χορδή $ΑΒ$ του κύκλου, αν και μόνο αν, το σημείο M είναι το μέσο του τόξου $ΑΒ$. (β) Στον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε τις χορδές $ΒΔ$ και $ΓΕ$ παράλληλες στις χορδές $ΒΔ$ και $ΓΕ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η χορδή $ΔΕ$

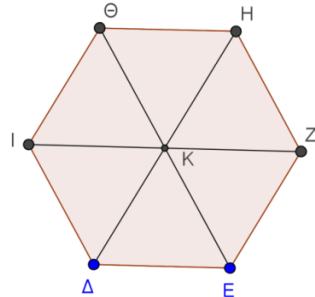
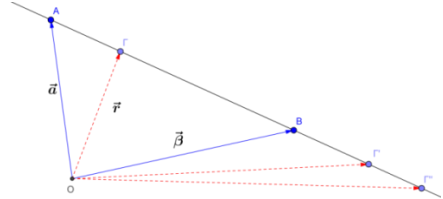
	✓ Σχέση γωνίας που σχηματίζει μία χορδή ενός κύκλου με την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής αυτής και κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο που αντιστοιχεί στη χορδή αυτή		είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες; • Ποιο κριτήριο χρησιμοποιώ για να αποδείξω ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες ;
4. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων (Γ6.6) Διερευνούν, αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.	4.1. Διερευνούν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων με τη χρήση κατάλληλων εφαρμογιδίων. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Απόσταση δύο σημείων Νέες Έννοιες ✓ Διάκεντρος ✓ Θέση δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $R \geq \rho$ και $\delta = (KL)$ ✓ Συνθήκες, ώστε δύο κύκλοι να τέμνονται, να εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά ή να είναι ξένοι εξωτερικά	Παράδειγμα: <i>Σχετικές θέσεις δύο κύκλων</i> • Στο πιο κάτω εφαρμογίδιο, να μεταβάλλετε το δρομέα «δ» και να αναφέρετε τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο με τις ακτίνες των δύο κύκλων, όταν οι δύο κύκλοι: (α)είναι ξένοι εξωτερικά (β)εφάπτονται εξωτερικά (γ)τέμνονται (δ)εφάπτονται εσωτερικά (ε)είναι ξένοι εσωτερικά 	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παραδείγματα: (α) Στο εφαρμογίδιο «ALykEn03_Thesis2Kyklon.ggb» δίνονται δύο κύκλοι, τους οποίους μπορούμε να μεταβάλουμε, αλλάζοντας το μήκος της ακτίνας τους, αλλά και τη θέση τους αλλάζοντας το μήκος της διακέντρου τους. Να μετακινήσετε το δρομέα d για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, έτσι ώστε οι κύκλοι: - να έχουν δύο κοινά σημεία - να έχουν ένα κοινό σημείο - να μην έχουν σημεία τομής Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτινών; Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι παρατηρώ για τα αντίστοιχα μήκη των

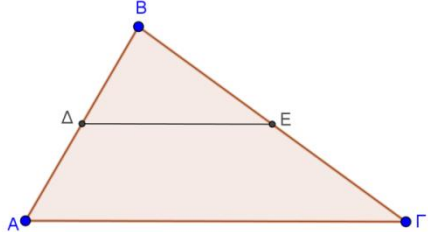
			δύο ακτινών και της απόστασης των κέντρων των δύο κύκλων; • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο για να φθάσω σε γενίκευση; • Σε ποιο γενικό συμπέρασμα μπορώ να καταλήξω σε καθεμία από τις πιο πάνω περιπτώσεις και πώς μπορώ να το αποδείξω; (β) Να αποδείξετε ότι σε δύο κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά στο A και έχουν ακτίνες ρ και 2ρ, κάθε χορδή του μεγάλου κύκλου, που αρχίζει από το A, διχοτομείται από τον μικρότερο κύκλο. Απαντώ στην ερώτηση: • Τι παρατηρείτε για τη θέση των δύο κέντρων των κύκλων αφού εφάπτονται εσωτερικά και έχουν τα συγκεκριμένα μήκη ρ και 2ρ;
5. Σχέσεις διακέντρου – ακτινών δύο κύκλων (Γ6.12) Ανακαλύπτουν τις σχέσεις μεταξύ διακέντρου και ακτινών μεταξύ δύο κύκλων.	5.1. Βρίσκουν τη σχετική θέση δύο κύκλων εφαρμόζοντας τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο και τις ακτίνες των δύο κύκλων. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Στοιχεία κύκλου ✓ Απόσταση δύο σημείων ✓ Ορισμός διακέντρου ✓ Θέση δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $R \geq \rho$ και $\delta = (K\Lambda)$	Παράδειγμα: <i>Απόδειξη της συνθήκης που ισχύει, όταν δύο κύκλοι τέμνονται</i> • Αν δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται, να αποδείξετε ότι ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου $\delta = K\Lambda$. Παράδειγμα: <i>Σχετική θέση δύο κύκλων</i> • Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις: (α) Κύκλοι $(K, 4cm)$, $(\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 10cm$ (β) Κύκλοι $(K, 4cm)$, $(\Lambda, 6cm)$, $K\Lambda = 13cm$	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.</i> Παραδείγματα: (α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(K, 12cm)$ και $(\Lambda, 20cm)$, με $K\Lambda = 25cm$, τέμνονται. (β) Να ορίσετε το μήκος της ακτίνας ρ ενός κύκλου με κέντρο το σημείο N και το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $N\Lambda$, ώστε οι κύκλοι (N, ρ) και $(\Lambda, 20cm)$ να μην

	Νέες Έννοιες ✓ Θέση δύο κύκλων $((K, R)$ και (Λ, ρ) με διάκεντρο δ, $R \geq \rho$ και $\delta = (K\Lambda)$) με βάση τη σχέση που συνδέει τη διάκεντρο με τη διαφορά ή το άθροισμα των δύο ακτινών των δύο κύκλων: ➤ $R - \rho < \delta < R + \rho$ ➤ $R + \rho = \delta$ ➤ $R - \rho = \delta$ ➤ $R + \rho < \delta$ ➤ $R - \rho > \delta$	(γ) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm), K\Lambda = 2cm$ (δ) Κύκλοι $(K, 4cm), (\Lambda, 6cm), K\Lambda = 1cm$	τέμνονται (να διακρίνεται όλες τις περιπτώσεις). Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πότε δύο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) τέμνονται; • Ποια γενική συνθήκη χρησιμοποιώ, για να αποδείξω ότι δύο συγκεκριμένοι κύκλοι τέμνονται ή όχι;
6. Μονόμετρα – διανυσματικά μεγέθη, έννοια διανύσματος, πράξεις διανυσμάτων (Γ5.16) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του διανύσματος (ορισμός διανύσματος, συντεταγμένες διανύσματος, πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα).	6.1 Ορίζουν την έννοια του διανύσματος και των χαρακτηριστικών στοιχείων του και την εφαρμόζουν σε προβλήματα Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου Νέες Έννοιες ✓ Διάνυσμα-συμβολισμός διανυσμάτων ✓ Χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος: ➤ Διεύθυνση ➤ Φορά ➤ Μέτρο	Παράδειγμα: Ορισμός διανύσματος-χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος • Να αναφέρετε ποια από τα παρακάτω είναι διανύσματα, αιτιολογώντας την απάντησή σας: (α) 1 km βόρεια από την πλατεία Λευκωσίας (β) $20m/s^2$ (γ) $36cm^2$ (δ) Βορειοδυτικά με 60° γωνία σε σχέση με την κατεύθυνση του βορρά.	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος. Παράδειγμα: Να δώσετε ένα μονόμετρο και ένα διανυσματικό μέγεθος. Να εξηγήσετε πώς αντιλαμβάνεστε τη διαφορά των δύο μεγεθών. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιος είναι ο ορισμός των διανυσματικών και μονόμετρων μεγεθών. Ποια είναι η «ειδοποιός διαφορά»; • Ποιο παράδειγμα μπορώ να δώσω, ώστε να τονίζεται η διαφορά; Γιατί τα μεγέθη «Απόσταση» και «Μετατόπιση» τονίζουν αυτή τη διαφορά;

	6.2 Διακρίνουν μεγέθη σε μονόμετρα και διανυσματικά Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου ✓ Ορισμός και χαρακτηριστικά στοιχεία διανύσματος Νέες Έννοιες ✓ Μονόμετρο μέγεθος ✓ Διανυσματικό μέγεθος	Παραδείγματα: <i>Μονόμετρο- διανυσματικό μέγεθος</i> • Για τον προσδιορισμό του σημείου B σε σχέση με το σημείο A, ο Ανδρέας και ο Βασίλης δήλωσαν τα πιο κάτω: <i>Ανδρέας:</i> Το σημείο B απέχει $5Km$ από το σημείο A. <i>Βασίλης:</i> Από το σημείο A να προχωρήσεις $4 Km$ «δεξιά» και μετά $3 Km$ προς τα «πάνω».  Ποιο από τα δύο παιδιά έδωσε καλύτερη περιγραφή, ώστε να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου B από το σημείο A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. • Η θερμοκρασία στις 20 Ιουνίου ήταν $38^{\circ}C$. Ταξίδεψα με το ποδήλατό μου με σταθερή ταχύτητα $38 km/h$ από Λευκωσία προς Λάρνακα. Πώς σχολιάζετε τον αριθμό 38 στις πιο πάνω περιπτώσεις, αναφορικά με τα μεγέθη «Θερμοκρασία» και «Ταχύτητα»;	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα για να ερμηνεύσω ένα πραγματικό πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.</i> Παράδειγμα: Ένα πλοiάριο πλέει σε λίμνη με σταθερή ταχύτητα $4m/s$ με κατεύθυνση από Δυτικά προς Ανατολικά. Στην περιοχή φυσάει άνεμος, ο οποίος δημιουργεί ρεύμα στη λίμνη με ταχύτητα $1m/s$ με Νότια κατεύθυνση. (α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πλοiαρίου και να αιτιολογήσετε πώς ο άνεμος την επηρεάζει, αναφέροντας το μέτρο της και την ακριβή της κατεύθυνσης. (β) Πόσα μέτρα νότια από το σημείο που έχει ξεκινήσει θα βρίσκεται η βάρκα μετά από 2 λεπτά; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια στρατηγική χρησιμοποιώ, για να λύσω το πρόβλημα; • Γιατί η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος και πώς η πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων μπορεί να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος; • Πώς με βοηθά το πιο κάτω σχήμα στην επίλυση του προβλήματος; 
--	--	---	--

7. Μέτρο διανύσματος, σχέσεις διανυσμάτων (Γ6.11) Ορίζουν, αναπαριστούν και εφαρμόζουν ιδιότητες των διανυσμάτων, βρίσκουν το μέτρο διανύσματος, κάνουν πράξεις με διανύσματα (άθροισμα, διαφορά διανυσμάτων, γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα) και εξετάζουν τη συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων.	7.1 Υπολογίζουν το μέτρο διανύσματος και να εκτελούν πράξεις με διανύσματα (πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα). Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός Μονόμετρου και διανυσματικού μεγέθους ✓ Ορισμός διανύσματος Νέες Έννοιες ✓ Συντεταγμένες $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ του διανύσματος $\vec{AB}$ ✓ Υπολογισμός και συμβολισμός του μέτρου του $\vec{AB}$ ✓ Μέτρο διανύσματος ✓ Ορισμός διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Άθροισμα 2 διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Διαφορά $\vec{a} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το $\vec{a}$ ✓ Πολλαπλασιασμός αριθμού λ ($\lambda \neq 0$) με ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$ ✓ Συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ✓ Συνθήκη για να είναι συνευθειακά 3 σημεία ✓ Συντεταγμένες κέντρου βάρους	Παράδειγμα: <i>Μέτρο διανύσματος</i> • Να υπολογίσετε το μέτρο των πιο κάτω διανυσμάτων: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\delta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Παράδειγμα: <i>Μηδενικό διάνυσμα</i> • Να βρείτε τη σχέση των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, όπου: $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{BG}, \vec{\beta} = \vec{KL} + \vec{LM} + \vec{MK}$ και $\vec{\gamma} = \vec{AB} + \vec{BA}$ Παραδείγματα: <i>Πράξεις διανυσμάτων (άθροισμα, διαφορά, πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα)</i> • Να σχεδιάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με το: (α) $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD}$ (β) $\vec{AB} - \vec{GD}$ (γ) $\vec{AD} - \vec{GB}$ (δ) $\vec{AD} - \vec{BG}$ • Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, το M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Αν $\vec{AB} = \vec{x}$ και $\vec{AG} = \vec{y}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{AM}$ συναρτήσει των $\vec{x}$ και $\vec{y}$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάσω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.</i> Παράδειγμα: Αν E και Z είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι τα DE και BZ χωρίζουν τη διαγώνιο AG σε τρία ίσα μέρη. Υπόδειξη: Με αρχή το σημείο A ορίζουμε $\vec{AB} = \vec{x}$ και $\vec{AD} = \vec{y}$. Γράφουμε το διάνυσμα $\vec{AH}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους και τους χρησιμοποιούμε (μέσω της ισότητας δύο διανυσμάτων) για να βρούμε τη σχέση του AH με το AG. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;
--	--	---	---

	του τριγώνου		
	7.2 Εξετάζουν κατά πόσο δύο διανύσματα είναι ίσα, ομόρροπα, αντίρροπα, αντίθετα ή παράλληλα. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός διανύσματος ✓ Μέτρο διανύσματος Νέες Έννοιες ✓ Σχέσεις δύο διανυσμάτων: ➤ Παράλληλα ή συγγραμμικά μη-μηδενικά διανύσματα ➤ Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα ➤ Ίσα διανύσματα ➤ Αντίθετα διανύσματα	Παράδειγμα: <i>Παράλληλα διανύσματα</i> • Να βρείτε τη σχέση των πιο κάτω διανυσμάτων και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: $\vec{\alpha} = 2\vec{u}$, $\vec{\beta} = -3\vec{u}$, $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{u}$ και $\vec{\delta} = 100\vec{u}$ Παράδειγμα: <i>Ίσα - αντίθετα διανύσματα</i> • Δίνεται το εξάγωνο $\Delta EZH\Theta I$, το οποίο έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες. Να αναφέρετε ένα ίσο και ένα αντίθετο διάνυσμα προς το διάνυσμα: (α) $\overrightarrow{\Theta H}$ (β) $\overrightarrow{H Z}$ (γ) $\overrightarrow{K \Delta}$ 	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Αν τα σημεία A και B έχουν διανυσματικές ακτίνες (ως προς ένα σταθερό σημείο O του επιπέδου τους) $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, αντίστοιχα, να εξηγήσετε γιατί κάθε σημείο Γ (Γ', Γ'', ...) που ανήκει στην ευθεία AB έχει διανυσματική ακτίνα $\vec{r} = \lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta}$, με $\lambda + \mu = 1$.  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς γράφεται το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ ως άθροισμα δύο διανυσμάτων; • Ποια η σχέση του «μεταβλητού» διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ με το «σταθερό» διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$;
8. Διανυσματική ακτίνα (Γ5.12) Ορίζουν το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό, διαιρούν ευθύγραμμο	8.1 Χρησιμοποιούν την έννοια της διανυσματικής ακτίνας για να χωρίσουν ευθύγραμμο τμήματα εσωτερικά ή εξωτερικά με δεδομένο λόγο.	Παράδειγμα: <i>Χωρισμός ευθύγραμμου τμήματος σε δοθέντα λόγο</i> Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(2,1)$ και $B(3,3)$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες σημείου P του AB έτσι, ώστε	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. <i>Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη τη γνώμη των άλλων.</i>

τμήμα σε n ίσα μέρη, βρίσκουν τον λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων, ορίζουν την αναλογία ευθύγραμμων τμημάτων, διαιρούν ευθύγραμμα τμήματα εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δεδομένο λόγο, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου.	Προαπαιτούμενες έννοιες ✓ Ορισμός διανύσματος ✓ Σχέσεις δύο διανυσμάτων ➤ Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα ➤ Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα ➤ Ίσα διανύσματα ➤ Αντίθετα διανύσματα Νέες Έννοιες ✓ Διάνυσμα θέσης σημείου P στο επίπεδο ή διανυσματική ακτίνα του P ως προς το σημείο αναφοράς O του επιπέδου ✓ Μοναδιαίο διάνυσμα ✓ Διανυσματική ακτίνα ✓ Διάνυσμα με δεδομένο λόγο	να το χωρίζει σε λόγο 2: 3.	Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Αν οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων B και Γ ως προς το σημείο A είναι $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, αντίστοιχα, πώς μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα στο σχήμα συναρτήσει των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$; • Πώς γράφεται το διάνυσμα $\overrightarrow{DE}$ ως άθροισμα δύο διανυσμάτων; • Πώς αποφασίζω για την παραλληλία των DE και AG;
9. Γωνία διανυσμάτων, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (Γ7.9) Ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο και αποδεικνύουν τις ιδιότητες διανυσμάτων στο επίπεδο, βρίσκουν την αναλυτική	9.1 Βρίσκουν τη γωνία δύο διανυσμάτων, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στο επίπεδο και βρίσκουν την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου τους.	Παράδειγμα: <i>Γωνία δύο διανυσμάτων</i> • Να εξηγήσετε γιατί η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$ δεν είναι 70°, και να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα: (α) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ (β) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GA}$ (γ) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια, για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.</i> Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, αναφέρουν και αποδεικνύουν τη συνθήκη καθετότητας και παραλληλίας τους, βρίσκουν τη γωνία δυο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους και τα αναπαριστούν στο επίπεδο.	Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός διανύσματος ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί Νέες Έννοιες ✓ Γωνία θ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ✓ (αναφορά και σε ειδικές περιπτώσεις, ομόρροπα, αντίρροπα, κάθετα) ✓ Εσωτερικό ή αριθμητικό γινόμενο ✓ Αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων	Παραδείγματα: <i>Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων</i> • Τι είδους μέγεθος είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$; • Ποια στοιχεία είναι απαραίτητα να γνωρίζουμε έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων; • Αν $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε: (α) το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (β) το $(2\vec{a}) \cdot (-3\vec{\beta})$ (γ) τη γωνία θ που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα	<i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι πλευρές μίας ορθής γωνίας; • Τι ισχύει γενικά για το εσωτερικό γινόμενο δύο κάθετων διανυσμάτων;
10.Γεωμετρικές κατασκευές (Γ5.4) Ορίζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (στερεά, γεωμετρικά	10.1 Κάνουν διάφορες γεωμετρικές κατασκευές με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή/και λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κλίση και γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Προσανατολισμός γωνίας ✓ Απόσταση μεταξύ δύο σημείων	Παραδείγματα: <i>Γεωμετρικές κατασκευές</i> • Να σχεδιάσετε δύο τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα: (α) τη $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ με το γράμμα ω (β) τη $\gamma\omega\nu(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ με το γράμμα φ • Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις γωνίες ω και φ; • Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να φέρετε την απόσταση των δύο ευθειών.	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παραδείγματα: (α) Να βρείτε το σύνολο των σημείων, των οποίων οι αποστάσεις από δύο δοθέντα σημεία A, B του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

σχήματα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση δύο σημείων, μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων, πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων, σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο/ευθεία, σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, κάθετες ευθείες, απόσταση σημείου από ευθεία, χάραξη παράλληλων ευθειών, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος).

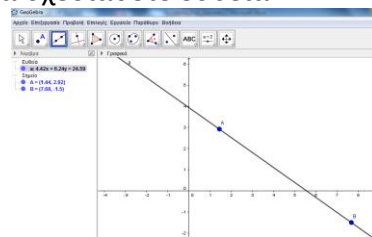
- ✓ Μέσο ευθύγραμμου τμήματος
- ✓ Ορίζουσα 3×3

Νέες Έννοιες

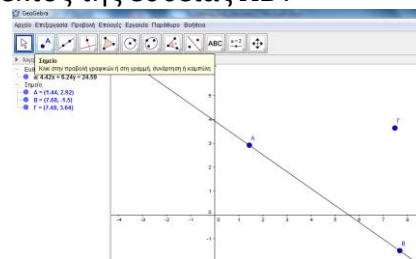
- ✓ Ορισμός γωνίας δύο ευθειών
- ✓ Απόσταση σημείου A από ευθεία (ε)

- Να ανοίξετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας **GeoGebra**.

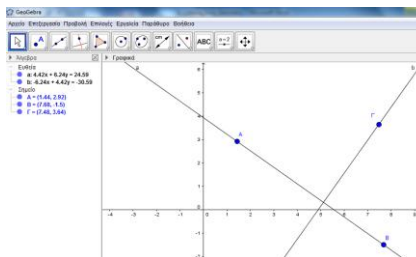
(α) Να σχεδιάσετε ευθεία AB .



(β) Να κατασκευάσετε τυχαίο σημείο Γ εκτός της ευθείας AB .



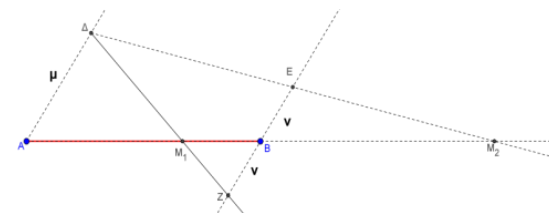
(γ) Να φέρετε κάθετη από το Γ προς την AB .



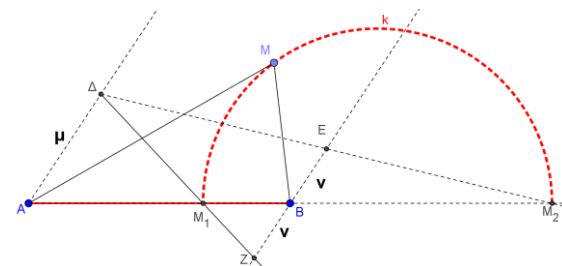
Απαντώ στις ερωτήσεις:

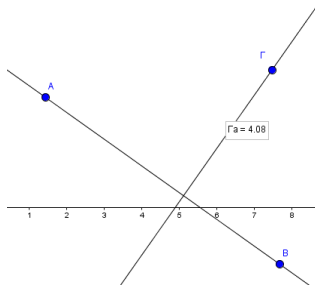
- Τι θεωρείται σταθερό και τι μεταβλητό στο πρόβλημα;
- Πόσα σημεία υπάρχουν με την συγκεκριμένη ιδιότητα;
- Γιατί μπορώ πάντα να βρίσκω δύο τέτοια σημεία πάνω στην ευθεία AB ;
- Γιατί η πιο κάτω κατασκευή με $AD \parallel BE$ μου δίνει δύο σημεία M_1 και M_2 πάνω στην AB έτσι ώστε να ισχύει:

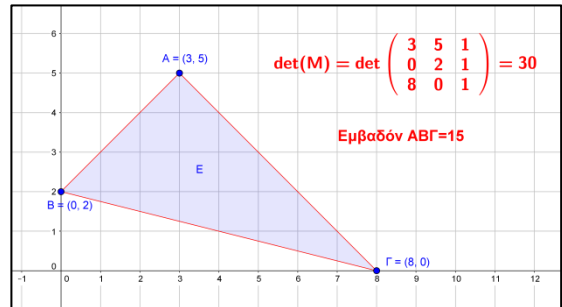
$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{M_2A}{M_2B}$$

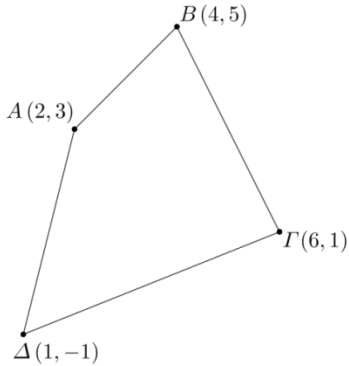
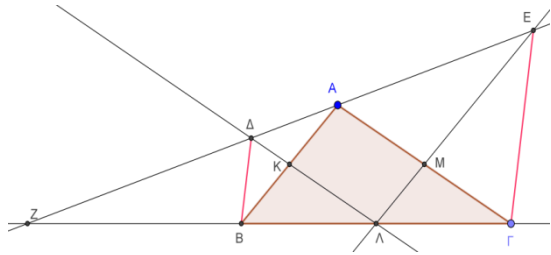


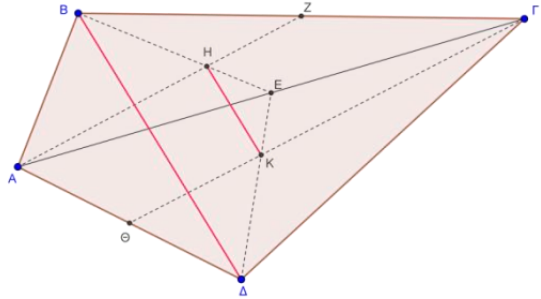
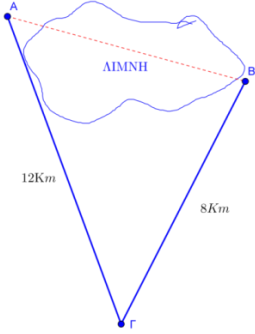
- Γιατί κάθε σημείο του ημικυκλίου με διάμετρο την M_1M_2 επαληθεύει τη σχέση, αφού η MM_1 είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου MAB και η MM_2 είναι εξωτερική του διχοτόμος;

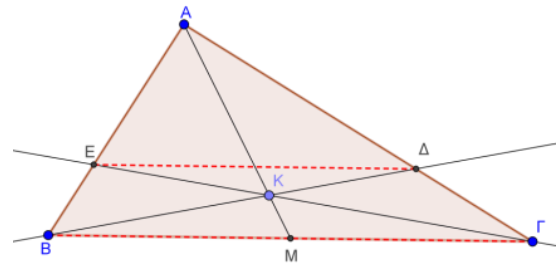


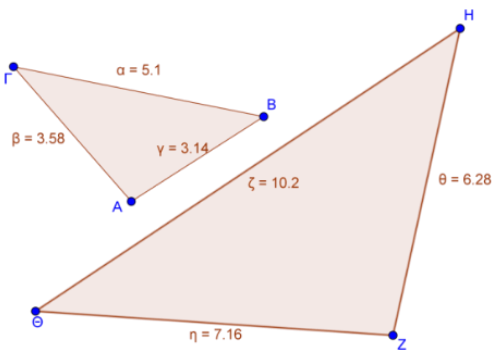
		(δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB. 	
11.Εξίσωση ευθείας, δέσμη ευθειών, συντρέχουσες ευθείες, γωνία ευθειών, απόσταση σημείου από ευθεία, εμβαδόν τριγώνου Γ6.7) Διερευνούν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας, τη θέση ευθειών, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, την απόσταση σημείου από ευθεία, τις συντεταγμένες του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, τη γωνία ευθειών και το εμβαδόν τριγώνου σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.	11.1 Διερευνούν και εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας, τη δέσμη ευθειών και τη συνθήκη ώστε τρεις ευθείες να συντρέχουν. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κλίση και γραφική παράσταση ευθείας ✓ Προσανατολισμός γωνίας Νέες Έννοιες ✓ Εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ ➤ συνθήκη για να παριστάνει ευθεία ➤ ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) ✓ Δέσμη ευθειών ➤ Δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο P. ➤ Δέσμη παράλληλων ευθειών. ✓ Συντρέχουσες ευθείες	Παραδείγματα: Εξίσωση ευθείας – Δέσμη ευθειών – Συντρέχουσες ευθείες • Να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία $(\varepsilon): (k^2 - 2k)x + (k - 2)y + k = 0$ παριστάνει ευθεία για τις διάφορες πραγματικές τιμές του k. • Να εξηγήσετε τι παριστάνουν οι πιο κάτω εξισώσεις: (α) $x + y + k(2x + 2y - 4) = 0, k \in \mathbb{R}$ (β) $x + y + k(2x - 2y - 4) = 0, k \in \mathbb{R}$ • Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $(\varepsilon_1): x - y + 2 = 0, (\varepsilon_2): -3x + y - 4 = 0$ και $(\varepsilon_3): -2x - 5y + 1 = 0$ συντρέχουν.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Στο εφαρμογίδιο «A_Lyk_EmbadonTrigwnou.ggb» μας δίνεται η δυνατότητα να μετακινούμε το σημείο A σε διάφορες θέσεις στο επίπεδο και να παρατηρούμε την τιμή του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ και της ορίζουσας ενός συγκεκριμένου πίνακα M. - Ποια σχέση έχουν τα στοιχεία του πίνακα M με τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$; - Ποια είναι η σχέση που συνδέει την τιμή της ορίζουσας του πίνακα M με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$; - Τι συμβαίνει όταν το A τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία $B\Gamma$;

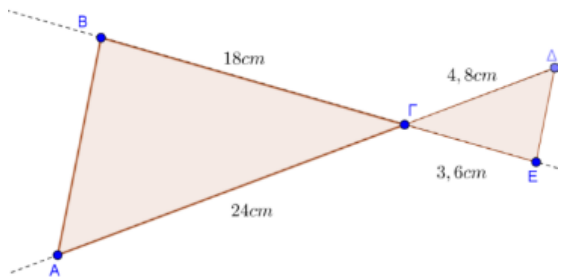
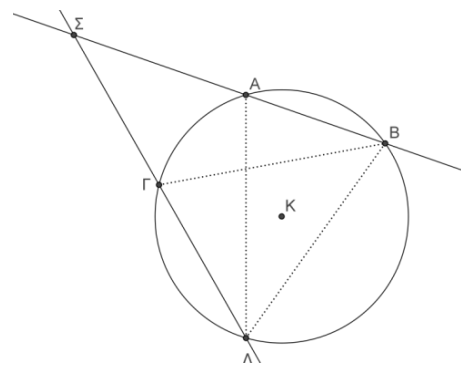
			 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες πληροφορίες μου έχει δώσει το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο; • Ποια εικασία μπορώ να κάνω; • Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο στην απόδειξη της εικασίας μου;
11.2	Διερευνούν και εφαρμόζουν τη γωνία ευθειών, την απόσταση σημείου από ευθεία και το εμβαδόν τριγώνου στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κλίση ευθείας και γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Προσανατολισμός γωνίας ✓ Απόσταση μεταξύ δύο σημείων ✓ Μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορίζουσα 3×3 ✓ Ορισμός γωνίας δύο ευθειών ✓ Απόσταση σημείου από ευθεία ✓ Εμβαδόν τριγώνου όταν είναι γνωστές οι τρεις κορυφές	Παράδειγμα: <i>Γωνία δύο ευθειών</i> • Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους: (α) $\varepsilon_1: x + y - 1 = 0, \varepsilon_2: x - y + 3 = 0$ (β) $\varepsilon_1: x - y + 7 = 0, \varepsilon_2: y + 3 = 0$ (γ) $\varepsilon_1: x - 1 = 0, \varepsilon_2: y + 5 = 0$ Παράδειγμα: <i>Απόσταση σημείου από ευθεία</i> • Δύο πλευρές ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ανήκουν στις ευθείες $3x - 4y + 10 = 0$ και $3x - 4y - 10 = 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Παράδειγμα: <i>Εμβαδόν τριγώνου</i> • Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, όπου $A(2, 3), B(4, 5), \Gamma(6, 1)$ και $\Delta(1, -1)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ και κατανοώ της δέσμης ευθειών, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Δίνεται η εξίσωση: $(1 + 2\lambda)x + (-2 + 3\lambda)y - 3 - 18\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για όλες τις πραγματικές τιμές του λ. (β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που σχηματίζονται για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ διέρχονται από ένα σταθερό σημείο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού. (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται και από το σημείο $A(4, 1)$.

	Νέες Έννοιες ✓ Γωνία ευθειών, απόσταση σημείου από ευθεία και εμβαδόν τριγώνου		Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι πρέπει να εξετάσω για να αποδείξω ότι η εξίσωση του προβλήματος παριστάνει ευθεία για όλες τις πραγματικές τιμές του λ; • Ποια έννοια χρησιμοποιώ για να αποδείξω ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από ένα σταθερό σημείο; • Μπορώ να χρησιμοποιήσω διαφορετική διαδικασία για να επιλύσω την άσκηση αυτή;
12. Όμοια σχήματα (Γ4.8) Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέσεις ισότητας και ομοιότητας μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και ελέγχουν τις υποθέσεις τους, χρησιμοποιώντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.	12.1 Χρησιμοποιούν παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό, για να εντοπίζουν όμοια γεωμετρικά σχήματα. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. Νέες Έννοιες ✓ Όμοια πολύγωνα	Παράδειγμα: Όμοια πολύγωνα • Να εξηγήσετε γιατί: (α) δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους (β) δύο τετράγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους (γ) ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δεν είναι πάντοτε όμοια. (δ) ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος δεν είναι πάντοτε όμοια. (ε) δύο ίσα τρίγωνα είναι και όμοια (στ) δύο όμοια σχήματα δεν είναι κατά ανάγκη ίσα. (ζ) δύο τρίγωνα όμοια προς τρίτο είναι και μεταξύ τους όμοια	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα. Παράδειγμα: Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα K, Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ και ΓA, αντίστοιχα. Από το A φέρουμε τυχαία ευθεία (ε), η οποία τέμνει τις ευθείες AK και ΛM στα σημεία Δ και E, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η $B\Delta$ είναι παράλληλη προς την ΓE.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιά ζεύγη παράλληλων πλευρών έχω; • Από ποια δεδομένα εξάγεται η

			παραλληλία συγκεκριμένων ευθειών, ώστε να μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Θαλή; • Η ερώτηση στο πρόβλημα είναι απόδειξη παράλληλων πλευρών. Σε τι αναφέρεται το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή, ώστε να μου επιτρέψει να το εφαρμόσω;
13.Θεώρημα Θαλή (Γ5.12) Ορίζουν το γινόμενο ευθύγραμμο τμήματος με αριθμό, διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε n ίσα μέρη, βρίσκουν τον λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων, ορίζουν την αναλογία ευθύγραμμων τμημάτων, διαιρούν ευθύγραμμο τμήματα εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δεδομένο λόγο, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και τα θεωρήματα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου.	13.1 Διατυπώνουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του και τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων Νέες Έννοιες ✓ Θεώρημα Θαλή ✓ Αντίστροφο Θεωρήματος Θαλή	Παράδειγμα: <i>Εφαρμογή Θεωρήματος Θαλή</i> • Σας δίνονται τρία ευθύγραμμο τμήματα α, β και γ. Να εξηγήσετε πώς μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τέταρτο τμήμα x έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$. Παράδειγμα: <i>Εφαρμογή αντίστροφου του Θεωρήματος Θαλή</i> • Στο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι τα σημεία H και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $HK \parallel B\Delta$. 	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Τα σημεία A και B είναι απρόσιτα λόγω της λίμνης που υπάρχει μεταξύ τους. Είναι γνωστές οι αποστάσεις $\Gamma A = 12 \text{ Km}$ και $\Gamma B = 8 \text{ Km}$. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι μπορεί να υπολογίσει την απόσταση AB, αφού γνωρίζει για ένα σημείο Δ που βρίσκεται πάνω στην ΓA έτσι, ώστε $\Gamma \Delta = 3 \text{ Km}$. Να γράψετε τον τρόπο σκέψης του μαθητή για τον υπολογισμό του μήκους AB, αιτιολογώντας την απάντησή σας. 

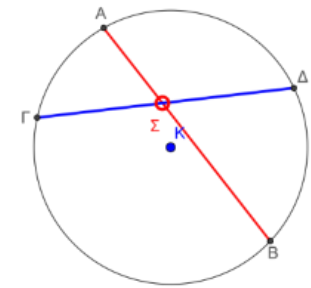
			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορεί το Θεώρημα Θαλή να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος; • Ποιες βοηθητικές γραμμές πρέπει να φέρω ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα;
14.Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων (Γ5.13) Ορίζουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων την έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων, αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων και του λόγου περιμέτρων και εμβαδών όμοιων σχημάτων.	14.1 Εφαρμόζουν την έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων. ✓ Θεώρημα Θαλή Νέες Έννοιες ✓ Ομόλογες κορυφές ✓ Ομόλογες πλευρές ✓ Λόγοι ομοιότητας μεταξύ δύο σχημάτων (ομόλογων πλευρών, περιμέτρων, εμβαδών)	Παράδειγμα: <i>Όμοια πολύγωνα - Εφαρμογή ιδιοτήτων</i> • Δύο όμοια πολύγωνα Π_1 και Π_2 έχουν εμβαδά 72 cm^2 και 128 cm^2 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε: (α) το λόγο των περιμέτρων τους (β) το μήκος της ομόλογης πλευράς του μικρότερου πολυγώνου, όταν η αντίστοιχη της πλευρά έχει μήκος 12 cm	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενά του και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.</i> Παράδειγμα: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η AM είναι διάμεσος και το K τυχαίο σημείο πάνω στην AM. Αν η BK τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ και η ΓK την AB στο E, να αποδείξετε ότι η DE είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορώ να αξιοποιήσω το μέσο M; Αν προεκτείνω το KM προς το M ώστε $ML = KM$, πώς μπορώ να έχω παράλληλες ευθείες;

			• Όταν έχω παράλληλες ευθείες, ποιο Θεώρημα μπορώ να εφαρμόσω; • Ποια αναλογία μηκών ευθύγραμμων τμημάτων σχηματίζω, έτσι ώστε να ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή; • Ποιο εργαλείο μου δίνει η εφαρμογή του αντίστροφου του Θεωρήματος Θαλή;
14.2	Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Ορισμός όμοιων πολυγώνων. ✓ Θεώρημα Θαλή ✓ λόγοι ομοιότητας Νέες Έννοιες ✓ Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων ✓ (1^ο κριτήριο) ως προς τις γωνίες τους ✓ (2^ο κριτήριο) ως προς 2 από τις πλευρές τους και τις περιεχόμενες τους γωνίες ✓ (3^ο κριτήριο) ως προς τις πλευρές τους	Παραδείγματα: Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων • Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), να φέρετε το ύψος AD. Να αποδείξετε ότι στο σχήμα υπάρχουν τρία όμοια τρίγωνα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. • Να αιτιολογήσετε γιατί τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους και να γράψετε: (α) τα ζεύγη ίσων γωνιών (β) τον λόγο των εμβαδών τους  • Στο πιο κάτω σχήμα: (α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια (β) να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Delta E$	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα. Παράδειγμα: Από σημείο A που βρίσκεται εκτός κύκλου (K, R) φέρουμε στον κύκλο τέμνουσα $AB\Gamma$ και εφαπτομένη AD. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $AD^2 = AB \cdot A\Gamma$. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Σε ποια βασική διαδικασία με οδηγεί η ζητούμενη μετρική σχέση; • Ποια τρίγωνα πρέπει να επιλεγούν για να συγκριθούν; • Ποιο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί;

		(γ) αν $\Delta E = 3\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του AB 	
15.Μετρικές σχέσεις στον κύκλο (Γ6.8) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις μετρικές σχέσεις σε κύκλο (τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο, την ιδιότητα της τέμνουσας ενός κύκλου, τη διαίρεση τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά με δεδομένο λόγο, το χρυσό λόγο, τα συζυγή αρμονικά σημεία και τα θεωρήματα διχοτόμων).	15.1 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν μετρικές σχέσεις στον κύκλο στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Λόγος μεταξύ δύο μεγεθών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. ✓ Όμοια τρίγωνα ✓ Θεώρημα Θαλή Νέες Έννοιες ✓ Δύναμη του σημείου Σ, ως προς κύκλο (K, R) ✓ Συνθήκη για θέση σημείου Σ ως προς κύκλο (K, R). (α) Το σημείο βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (β) Το σημείο βρίσκεται πάνω στον κύκλο. (γ) Το σημείο βρίσκεται μέσα στον κύκλο.	Παραδείγματα: Μετρικές σχέσεις στον κύκλο • Δίνεται κύκλος (K, R) και ένα σημείο Σ έξω από τον κύκλο. Φέρουμε τυχαία τέμνουσα ΣAB. Τι καταλαβαίνετε όταν λέμε το γινόμενο $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B)$ είναι σταθερό; • Στο πιο κάτω σχήμα: (α) να βρείτε δύο ζεύγη όμοιων τριγώνων που να έχουν κοινή κορυφή το σημείο Σ (β) να αποδείξετε ότι $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = (\Sigma \Gamma) \cdot (\Sigma \Delta)$ (γ) να αποδείξετε ότι $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = \Sigma K^2 - R^2$ 	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες. Παράδειγμα: Στο εφαρμογίδιο «A_Lyk_Dynamisimeiou.ggb» μας δίνεται η δυνατότητα να μετακινούμε το σημείο Σ και σε κάθε θέση να έχουμε υπολογισμένα τα γινόμενα $\Sigma A \cdot \Sigma B$ και $\Sigma \Gamma \cdot \Sigma \Delta$. (α) Τι παρατηρώ για τη σχέση των δύο γινομένων; (β) Τι παρατηρώ, όταν το σημείο Σ μεταφερθεί έξω από τον κύκλο; (γ) Τι συμβαίνει, όταν το σημείο Σ ανήκει στον κύκλο;

- Δίνεται κύκλος (K, R) και ένα τυχαίο σημείο Σ στο επίπεδο του κύκλου. Τι καταλαβαίνετε:
 (α) με τον συμβολισμό $\Delta_K(\Sigma)$;
 (β) για τη θέση του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (K, R) όταν $\Delta_K(\Sigma) > 0$ ή $\Delta_K(\Sigma) < 0$ ή $\Delta_K(\Sigma) = 0$;
 Ποιο είναι το πρόσημο της παράστασης $\Sigma K^2 - R^2$ σε κάθε περίπτωση;

$$\Sigma A * \Sigma B = 2.45 * 4.5 = 11.05$$



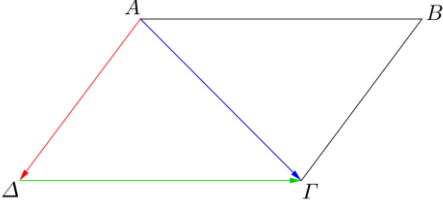
$$\Sigma \Gamma * \Sigma \Delta = 3.24 * 3.4 = 11.05$$

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες πληροφορίες μπορώ να πάρω από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο;
- Τι μου προσφέρει περισσότερο το εφαρμογίδιο από ένα σχήμα σε συνηθισμένο πίνακα;
- Ποια εικασία μπορώ να κάνω;
- Πώς με βοηθά το εφαρμογίδιο στην απόδειξη της εικασίας μου

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΤΡΗΣΗ)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Εμβαδόν τριγώνου (Μ6.2**) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία, την αναλυτική γεωμετρία και τον διανυσματικό λογισμό.	1.1 Επιλύουν προβλήματα εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο, χρησιμοποιώντας τύπους από το διανυσματικό λογισμό. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μήκος και μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Ορισμός παράλληλων και κάθετων ευθειών ✓ Ιδιότητες παραλληλογράμμου ✓ Ορισμός-Μέτρο διανύσματος ✓ Σχέσεις διανυσμάτων Νέες Έννοιες ✓ Συνδυασμός προηγούμενων γνώσεων για υπολογισμό εμβαδού	Παράδειγμα: <i>Εμβαδόν Τριγώνου</i> • Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$, με $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$, όταν: (α) $A(0, 6), B(0, 0)$ και $\Gamma(3, 0)$ (β) $A(-1, 3), B(1, 4)$ και $\Gamma(4, -2)$ Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \vec{\alpha} \vec{\beta} \eta \mu \Gamma$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Ο Νικόλας, παρατηρώντας το σχήμα αυτό, διατυπώνει τον ισχυρισμό: $ \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} $ Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός του είναι αληθής, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. 

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Μ6.2) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορώ να αποδείξω ότι ο ισχυρισμός του Νικόλα είναι λανθασμένος; • Ποιο αντιπαράδειγμα μπορώ να δώσω;
2. Πράξεις διανυσμάτων, μέτρο διανύσματος, μέτρο γωνίας δύο διανυσμάτων (M6.4) Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων, το γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα, το μέτρο διανύσματος όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων του, τη γωνία δύο διανυσμάτων, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων και σημείου από ευθεία και τη γωνία δύο ευθειών.	2.1 Εκτελούν πράξεις με διανύσματα. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός διανύσματος Νέες έννοιες ✓ Ορισμός και άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων ✓ Συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ ✓ Η διαφορά $\vec{a} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το $\vec{a}$ ✓ Πολλαπλασιασμός αριθμού λ ($\lambda \neq 0$) με ένα μη-μηδενικό διάνυσμα	Παραδείγματα: <i>Πράξεις με Διανύσματα</i> • Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων: (α) $\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ (β) $5\vec{a} - 3\vec{\beta} + \frac{1}{5}\vec{\gamma}$ • Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά του $B\Gamma$. Να βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι ίσο με: (α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta}$ (β) $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Delta}$ (γ) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Delta B}$ (δ) $\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma A}$	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τις σχέσεις διανυσμάτων, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Ένα έντομο τοποθετείται πάνω σε ένα αριθμημένο τετραγωνικό χαρτί στο σημείο με συντεταγμένες (3, 2). Το έντομο αρχίζει να κινείται στο χαρτί 1 μονάδα ανά λεπτό στην αρνητική x –κατεύθυνση και 2 μονάδες ανά λεπτό στην αρνητική y –κατεύθυνση. (α) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του εντόμου σε μονάδες ανά λεπτό; (β) Πού θα βρίσκεται το έντομο μετά την παρέλευση 3 λεπτών από τη στιγμή που αυτό άρχισε να κινείται; (γ) Πόσα λεπτά θα χρειαστεί το έντομο για να φτάσει στο σημείο με συντεταγμένες (−4, −12); (δ) Να εξετάσετε κατά πόσο το έντομο θα περάσει από το σημείο με συντεταγμένες (−13, −27), αν αυτό συνεχίσει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς σχετίζεται η κίνηση του εντόμου με το μέτρο της ταχύτητάς του;
	2.2 Υπολογίζουν το μέτρο διανύσματος, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Ορισμός διανύσματος Νέες έννοιες ✓ Συντεταγμένες διανύσματος ✓ Μέτρο διανύσματος	Παράδειγμα: <i>Μέτρο Διανύσματος</i> • Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$.	

2.3 Υπολογίζουν το μέτρο γωνίας δύο διανυσμάτων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

✓ Ορισμός διανύσματος

Νέες έννοιες

✓ Γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

✓ Γωνία δύο διανυσμάτων που είναι μεταξύ τους ομόρροπα, αντίρροπα, κάθετα

Παραδείγματα:

Γωνία Δύο Διανυσμάτων

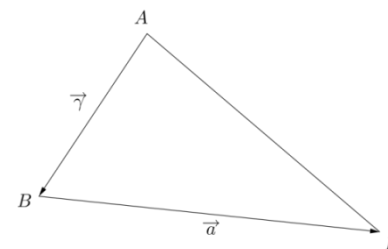
- Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 55^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 85^\circ$. Αν το σημείο Δ βρίσκεται πάνω στην πλευρά $B\Gamma$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων:
(α) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$
(β) $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma}$
(γ) $\overrightarrow{B\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

- Ποιες έννοιες που σχετίζονται με τα διανύσματα είναι δυνατό να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;
- Θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω διαφορετική διαδικασία (π.χ. σχήμα) για να λύσω την άσκηση; Γιατί;

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

Χρησιμοποιώ την έννοια και τις σχέσεις διανυσμάτων, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.

Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{a}$.



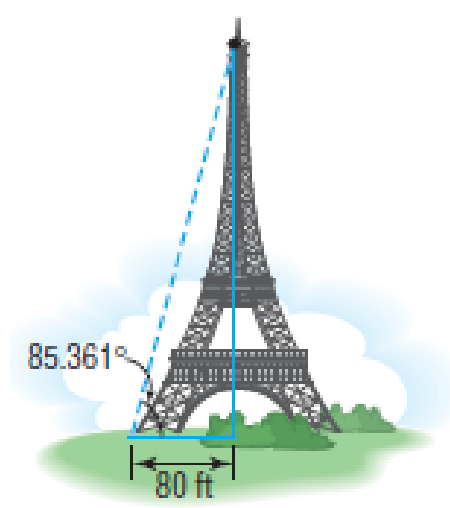
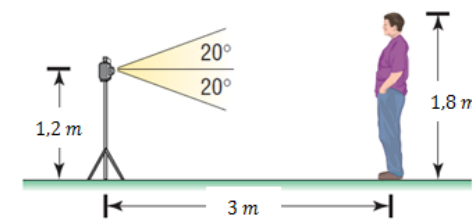
(α) Να αποδείξετε ότι:

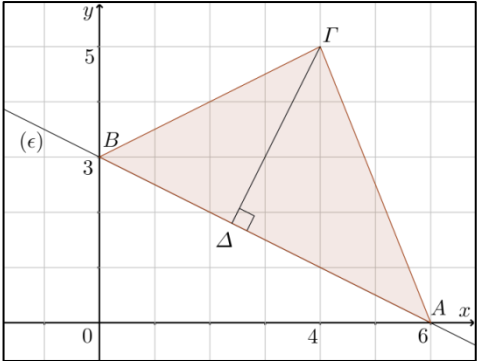
$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{\gamma}| \eta\mu B$$

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν $A(1, 2)$, $B(2, 10)$ και $\Gamma(6, 6)$.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες μαθηματικές ιδέες, που έχω ήδη μάθει, είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;
- Με ποιους τρόπους συνδέεται το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;

3. Ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών (Μ6.1) Επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.	3.1 Εφαρμόζουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνιάς Νέες Έννοιες ✓ Γωνία σε κανονική θέση, ✓ Τόξο ενός ακτινίου ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση (ημθ, συνθ, εφθ, σφθ, τεμθ, στεμθ).	Παράδειγμα: <i>Επίλυση Προβλήματος</i> • Να βρείτε ποιο ήταν το ύψος του πύργου του Άιφελ πριν από την τοποθέτηση της τηλεοπτικής κεραίας, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της πιο κάτω εικόνας. 	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Μια φωτογραφική κάμερα είναι τοποθετημένη σε ένα τρίποδα ύψους 1,2 m. Ο τρίποδας βρίσκεται τοποθετημένος 3 m μακριά από τον Γιώργο, ο οποίος έχει ύψος 1,8 m. Αν η κάμερα «καλύπτει» μια «περιοχή» 40°, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα, να εξετάσετε κατά πόσο τα πόδια και το κεφάλι του Γιώργου θα είναι ορατά από τον φακό της κάμερας. Αν όχι, να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που θα πρέπει να μετακινηθεί η κάμερα προς τα αριστερά, για να το πετύχουμε αυτό.  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;
---	---	--	--

4. Εμβαδόν τριγώνου (M6.2) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία, την αναλυτική γεωμετρία και το διανυσματικό λογισμό.	4.1 Υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Κλίση και γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Προσανατολισμός γωνίας ✓ Γωνία ευθείας με άξονα τετμημένων ✓ Απόσταση μεταξύ δύο σημείων ✓ Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 ✓ Αλγεβρική-γραφική επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους Νέες Έννοιες ✓ Υπολογισμός του εμβαδού ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$	Παραδείγματα: <i>Εμβαδόν Τριγώνου</i> • Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές: (α) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ και $\Gamma(4, 3)$ (β) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(-5, -4)$ • Δίνονται τα σημεία $A(5, 1)$ και $B(1, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M του άξονα $x'x$, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 7 τετραγωνικές μονάδες.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας ευθείας (ϵ). Η ευθεία (ϵ) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$.  Να βρείτε: (α) την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία (ϵ) (β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με δύο διαφορετικούς τρόπους (γ) τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Πώς με βοηθά το πιο πάνω σχήμα στην επίλυση του προβλήματος;
--	--	---	---

			• Γιατί θα ήταν χρήσιμο να χρησιμοποιήσω ένα κατάλληλο εφαρμογίδιο; • Τι μπορεί να μου δείξει το εφαρμογίδιο που δεν μπορεί να φανεί αμέσως από το πιο πάνω σχήμα;
5. Μέτρο γωνίας δύο ευθειών (M6.4) Υπολογίζουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων, το γινόμενο αριθμού επί διάνυσμα, το μέτρο διανύσματος, όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων του, τη γωνία δύο διανυσμάτων, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων και σημείου από ευθεία και τη γωνία δύο ευθειών.	5.1 Υπολογίζουν το μέτρο της γωνίας δύο ευθειών. Προαπαιτούμενες Γνώσεις ✓ Κλίση και γραφική αναπαράσταση ευθείας ✓ Προσανατολισμός γωνίας ✓ Γωνία ευθείας με άξονα τετμημένων Νέες Έννοιες ✓ Γωνία δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται σε σημείο A.	Παραδείγματα: <i>Γωνία Δύο Ευθειών</i> • Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: (α) $\varepsilon_1: 2x - y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 3y + 3 = 0$ (β) $\varepsilon_1: 2x - y + 10 = 0$ και $\varepsilon_2: y = 4$ (γ) $\varepsilon_1: 2x - 2y + 9 = 0$ και $\varepsilon_2: x = 2$ • Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3, 2)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(4, -1)$.	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας: (α) Η ευθεία $y = -3x + 5$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία: A. μηδενική B. οξεία Γ. ορθή Δ. αμβλεία (β) Οι ευθείες με εξισώσεις $3x - 2y = 4$ και $2x + 3y = -2$ σχηματίζουν γωνία: A. μηδενική B. οξεία Γ. ορθή Δ. αμβλεία (γ) Η απόσταση του σημείου $A(-1, 4)$ από την ευθεία $x - y + 1 = 0$ είναι ίση με: A. $\sqrt{2}$ B. 2 Γ. $2\sqrt{2}$ Δ. $4\sqrt{2}$ (δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(3, 5)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι ίσο με: A. 30 B. 15 Γ. 7,5 Δ. 60

			Απαντώ στην ερώτηση: • Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι σημαντικές σε αυτό το πρόβλημα;
	5.2 Υπολογίζουν την απόσταση σημείου από ευθεία. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Κλίση ευθείας ✓ Απόσταση μεταξύ δύο σημείων ✓ Υπολογισμός ορίζουσας 3×3 Νέες έννοιες ✓ Η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P(x_1, y_1)$ από την ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$	Παραδείγματα: <i>Απόσταση Σημείου από Ευθεία</i> • Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(2, 1)$ από την ευθεία: (α) $\varepsilon_1: 3x - 4y + 8 = 0$ (β) $\varepsilon_2: x = -3$ (γ) $\varepsilon_3: y = 5$ • Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AD του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 2), B(3, 0)$ και $\Gamma(-3, -2)$ • Να αποδείξετε ότι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{ \beta_1 - \beta_2 }{\sqrt{1 + \lambda^2}}$	
6. Κλίση ευθείας (M6.10) Υπολογίζουν το συντελεστή κατεύθυνσης (κλίση) ευθείας και επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας ευθείας και του ρυθμού μεταβολής.	6.1 Υπολογίζουν την κλίση ευθείας. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Γραφική Αναπαράσταση Ευθείας ✓ Προσανατολισμός Γωνίας ✓ Γωνία Ευθείας με Άξονα Τετμημένων Νέες έννοιες ✓ Κλίση ευθείας η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία θ	Παραδείγματα: <i>Κλίση Ευθείας</i> • Να υπολογίσετε την κλίση ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία θ ίση με: A. 45° B. 150° Γ. 0° Δ. 90°	

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Ιδιότητες μέσης τιμής (ΣΠ5.4**) Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή, εύρος, τυπική απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού).	1.1 Αποδεικνύουν βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτές. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μεταβλητή ✓ Ποιοτική και ποσοτική μεταβλητή ✓ Υπολογισμός των βασικών μέτρων θέσης: Μέση Τιμή, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή Νέες Έννοιες ✓ Απόδειξη βασικών ιδιοτήτων της μέσης τιμής	Παράδειγμα: <i>Ιδιότητες μέσης τιμής</i> - Η μέση τιμή των χρημάτων μεταξύ τεσσάρων αδελφών είναι €24. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των χρημάτων τους, αν: (α) ο πατέρας δώσει στον καθένα ακόμα €10 (β) αγοράσουν από μία σοκολάτα που στοιχίζει €4 (γ) την επόμενη μέρα διαπιστώσει το κάθε παιδί ότι κρατά ένα ευρώ περισσότερο από τα μισά χρήματα που είχε την προηγούμενη μέρα	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Ένα παιδί διατυπώνει τους πιο κάτω ισχυρισμούς. Να αποφασίσετε για την ορθότητά τους ή μη. Να αποδείξετε την αληθεία. (α) Αν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής X προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) έναν σταθερό αριθμό k , τότε η μέση τιμή αυξάνεται (ή ελαττώνεται) κατά τη σταθερή τιμή k . (β) Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής X είναι ίσες μεταξύ τους, τότε η μέση τιμή των τιμών ισούται με τις τιμές. (γ) Το εύρος είναι ένα αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. ΣΠ5.4) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορώ να αποδείξω ότι οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί είναι ορθοί ενώ ο τρίτος όχι; • Ποιο αντιπαράδειγμα μπορώ να δώσω για να στηρίξω ότι ο (γ) ισχυρισμός είναι λανθασμένος;										
2. Σταθμισμένος μέσος όρος (ΣΠ5.5) Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.	2.1 Ορίζουν και υπολογίζουν τον σταθμισμένο Μέσο Όρο. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μεταβλητή ✓ Ποιοτική και ποσοτική μεταβλητή ✓ Υπολογισμός των βασικών μέτρων θέσης: Μέση Τιμή, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή Νέες Έννοιες ✓ Συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) ✓ Ορισμός σταθμισμένου μέσου (weighted average) ✓ Τύπος για υπολογισμό σταθμισμένου μέσου Σημείωση ✓ Ο απλός Μέσος Όρος των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου όρου, όταν $w_1 = w_2 = \dots w_n = 1$.	Παράδειγμα: Σταθμισμένος μέσος όρος • Το μάθημα της Στατιστικής στο α΄ εξάμηνο αξιολογείται με βάση την παρουσία στο μάθημα (σύνολο παρουσιών 20), τον βαθμό δύο ενδιάμεσων εξετάσεων και την τελική εξέταση (βαθμολογία από το 100), ,με τη βαρύτητα που φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα: <table><tr><td></td><td>Ποσοστό βαθμολογίας</td></tr><tr><td>Παρουσία</td><td>10%</td></tr><tr><td>1^η ενδιάμεση</td><td>25%</td></tr><tr><td>2^η ενδιάμεση</td><td>25%</td></tr><tr><td>Τελική εξέταση</td><td>40%</td></tr></table> Να υπολογίσετε τον βαθμό δύο φοιτητών Α και Β, σύμφωνα με τις πιο κάτω επιδόσεις τους.		Ποσοστό βαθμολογίας	Παρουσία	10%	1 ^η ενδιάμεση	25%	2 ^η ενδιάμεση	25%	Τελική εξέταση	40%	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ τον ορισμό και τις ιδιότητες της μέσης τιμής, για να κατανοήσω προβλήματα. Παράδειγμα: Μια μαθήτρια αγόρασε 10 βιβλία που κόστιζαν χωρίς ΦΠΑ: 16,10,7,19,22,7,19,28,10,13 (α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της αξίας των 10 βιβλίων. (β) Πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις στο (α) ερώτημα, αν προσθέσουμε και το ΦΠΑ που είναι 19%; (γ) Αν η μαθήτρια πληρώσει 20 σεντ (χωρίς ΦΠΑ) για ντύσιμο του κάθε βιβλίου, πώς μεταβάλλονται οι απαντήσεις στο (β) ερώτημα; Απαντώ στην ερώτηση: • Ποιες βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής μπορώ να χρησιμοποιήσω, ώστε να υπολογίσω τη νέα μέση τιμή στα ερωτήματα (β) και (γ);
	Ποσοστό βαθμολογίας												
Παρουσία	10%												
1 ^η ενδιάμεση	25%												
2 ^η ενδιάμεση	25%												
Τελική εξέταση	40%												

		<table><tr><td></td><th colspan="2">Φοιτητής</th></tr><tr><td></td><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>Παρουσία</td><td>20/20</td><td>16/20</td></tr><tr><td>1^η ενδιάμεση</td><td>80%</td><td>70%</td></tr><tr><td>2^η ενδιάμεση</td><td>90%</td><td>95%</td></tr><tr><td>Τελική εξέταση</td><td>82%</td><td>90%</td></tr></table>		Φοιτητής			A	B	Παρουσία	20/20	16/20	1 ^η ενδιάμεση	80%	70%	2 ^η ενδιάμεση	90%	95%	Τελική εξέταση	82%	90%	
	Φοιτητής																				
	A	B																			
Παρουσία	20/20	16/20																			
1 ^η ενδιάμεση	80%	70%																			
2 ^η ενδιάμεση	90%	95%																			
Τελική εξέταση	82%	90%																			
3. Μέτρα διασποράς (ΣΠ6.3) Υπολογίζουν το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής διακριτών μεταβλητών (μη ομαδοποιημένων) και συγκρίνουν δυο ή περισσότερα δείγματα (με ή χωρίς τη χρήση λογισμικού).	3.1 Υπολογίζουν και ερμηνεύουν τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας: εύρος ν τιμών, διασπορά ή διακύμανση ν τιμών και συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας. Προαπαιτούμενες γνώσεις ✓ Μέγιστη και ελάχιστη τιμή μεταβλητής ✓ Μέτρα θέσης (μέση τιμή) Νέες Έννοιες ✓ Ερμηνεία μέτρων διασποράς ή μεταβλητότητας διακριτών μη ομαδοποιημένων μεταβλητών που παρουσιάζονται διαγραμματικά/γραφικά: ➤ Διακύμανση ή διασπορά ν τιμών ➤ Εύρος τιμών ✓ Υπολογισμός μέτρων διασποράς: ➤ Διακύμανση (s^2)	Παράδειγμα: <i>Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας</i> - Τι εκφράζουν τα μέτρα διασποράς και ποια είναι τα σπουδαιότερα από αυτά; Παράδειγμα: <i>Εύρος τιμών</i> - Πώς ορίζεται το εύρος τιμών και ποιο είναι κατά τη γνώμη σας το μειονέκτημά του ως μέτρο διασποράς; - Ποιο είναι το εύρος τιμών στους πιο κάτω βαθμούς ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών; 12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14, 15, 15, 19, 12, 8, 19, 9 Παράδειγμα: <i>Διακύμανση – Τυπική απόκλιση</i> (α) Πώς ορίζεται η διακύμανση και πώς η τυπική απόκλιση σε ένα σύνολο τιμών; (β) Ποιο μέτρο διασποράς πλεονεκτεί έναντι του άλλου και γιατί; (γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των βαθμών ενός διαγωνίσματος, όπως	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Οργανώνω την έννοια της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης και τις σχέσεις μεταξύ τους, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.</i> Παράδειγμα: Να δείξετε ότι αν από όλες τις τιμές 0,4,8,12,16,20,24 αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, τότε οι τιμές που θα προκύψουν θα έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά ίση με 1. <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> Ποιες μαθηματικές ιδέες-ιδιότητες που έχω μάθει είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος; ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: (α) Αν δοθούν ν τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\nu$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \dots + (x_\nu - x)^2$																		

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

➤ Τυπική απόκλιση (s)

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

➤ Εύρος τιμών (R)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

➤ Συντελεστής μεταβλητότητας (CV)

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}$$

Παρατηρήσεις

- ✓ Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.
- ✓ Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος από το 10%, οι τιμές παρουσιάζουν ομοιογένεια.

φαίνονται πιο κάτω:

12, 13, 20, 8, 10, 11, 10, 9, 7, 14
15, 15, 19, 12, 8, 19, 9

- Οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις σε δύο διαφορετικά τμήματα A και B για το ίδιο διαγώνισμα ήταν οι εξής:

	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ
ΤΜΗΜΑ Α1	16	1,8
ΤΜΗΜΑ Α2	16	4,8

Να συγκρίνετε τους βαθμούς των δύο τμημάτων, σύμφωνα με τα πιο πάνω αποτελέσματα και να διερευνήσετε ποιο από τα δύο τμήματα έχει περισσότερη ομοιογένεια στους βαθμούς.

Παράδειγμα:

Συντελεστής μεταβλητότητας

- (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας των δύο τμημάτων A_1 και A_2 , με βάση τον πιο πάνω πίνακα.

(β) Ποιο από τα δύο τμήματα παρουσιάζει περισσότερη ομοιογένεια στους βαθμούς του και γιατί;

γίνεται ελάχιστη όταν $x = \bar{x}$. Να δώσετε στατιστική ερμηνεία του αποτελέσματος.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Τι βαθμού πολυώνυμο είναι η συνάρτηση f ;
- Σε ποια τιμή του x αντιστοιχεί η ελάχιστη τιμή ενός τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$.
- Σε ποιο στατιστικό μέτρο αναφέρεται η συνάρτηση;
- Τι συμπεραίνω για τον συγκεκριμένο αριθμό που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση;

(β) Να αποδείξετε ότι ο τύπος που μας δίνει τη διακύμανση ενός συνόλου τιμών ($s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

(γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των βαθμών ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών, χρησιμοποιώντας τους δύο τύπους. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους.
12,13,20,8,10,11,10,9,7,14,
15,15,19,12,19,9

Απαντώ στην ερώτηση:

- Πώς συνδέεται το άθροισμα $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ με την τιμή της μέσης τιμής $\bar{x}$;

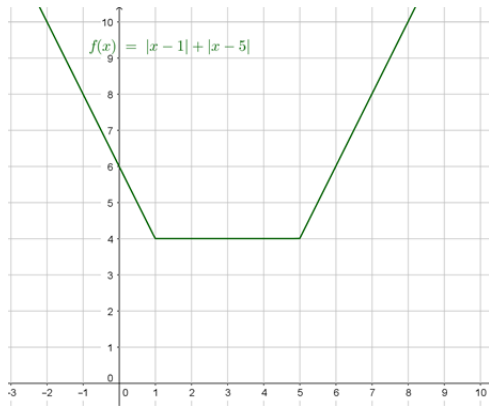
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

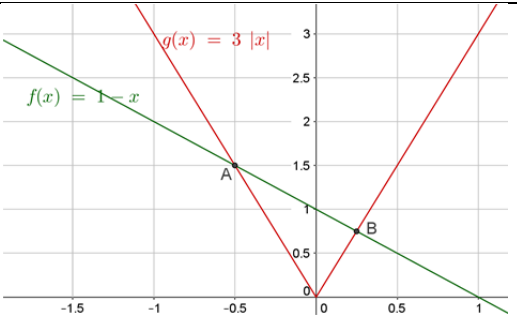
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

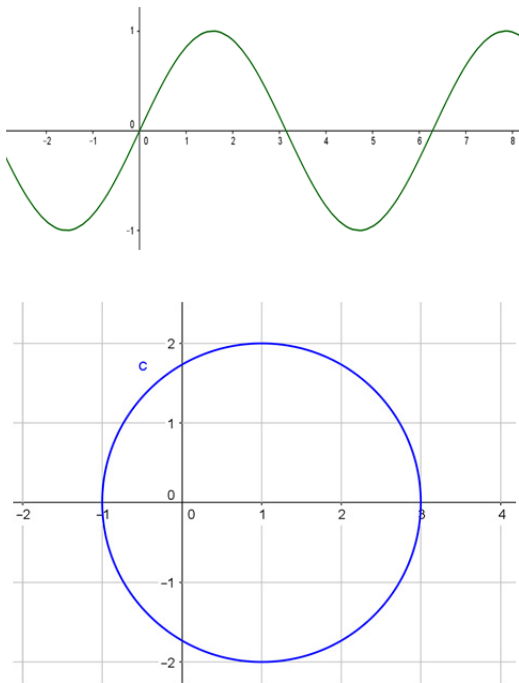
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Γραφικές Παραστάσεις Τμηματικών συναρτήσεων (Α5.5**) Μελετούν, ερμηνεύουν και εφαρμόζουν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων.	1.1 Μελετούν, ερμηνεύουν και σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια της αντιστοιχίας και της συνάρτησης ✓ Η έννοια και μελέτη των συναρτήσεων $f(x) = ax + \beta$, $g(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. ✓ Η σταθερή συνάρτηση Νέες Έννοιες: ✓ Οι τμηματικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται με διαφορετικούς τύπους σε διάφορα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.	Παραδείγματα: <i>Τμηματικές συναρτήσεις</i> • Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ είναι τμηματική συνάρτηση. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$ και $f(2)$. • Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι τμηματική και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.	
			ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Το ταχυδρομικό τέλος σε σεντ ενός δέματος βάρους x gr είναι $f(x)$. Αν για δέματα μάζας μέχρι 50gr το τέλος είναι όσο και η μάζα του δέματος, πάνω από 50gr μέχρι και 100gr είναι 60 σεντ, πάνω από 100gr μέχρι και 200gr είναι 80 σεντ και πάνω από 200 gr μέχρι και 400gr είναι 20 σεντ πιο ακριβό από την τιμή που έχει η μάζα του δέματος. (α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης αναφέροντας το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της. (β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνουν οι τιμές

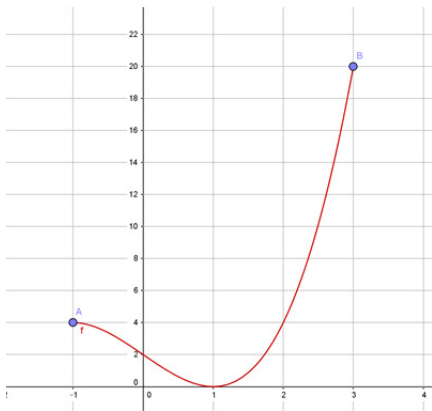
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Α5.5) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

			$f(40), f(80), f(160), f(300)$ και να τις υπολογίσετε. (δ) Γιατί δεν υπάρχει περίπτωση κάποιος να πληρώσει 70 σεντ για ένα δέμα το οποίο θέλει να ταχυδρομήσει; Κάποιος ισχυρίζεται ότι δεν μπορεί να είναι συνάρτηση η πιο πάνω έκφραση. Να αποφασίσετε για την ορθότητα ή μη του ισχυρισμού του. Αν διαφωνείτε, να εξηγήσετε γιατί ένας τέτοιος ισχυρισμός είναι ορθός και να δώσετε μια δική σας ονομασία στη συγκεκριμένη συνάρτηση. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Σε τι διαφέρει η συγκεκριμένη συνάρτηση από τις μέχρι τώρα γνωστές συναρτήσεις που έχουμε μελετήσει; • Πώς το σύνολο τιμών μπορεί να μας βοηθήσει στο πιο πάνω ερώτημα;
2. Εξισώσεις-Ανισώσεις με απόλυτες τιμές (Α.5.16) Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές.	2.1 Επιλύουν εξισώσεις με απόλυτες τιμές αλγεβρικά και γραφικά. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Επίλυση εξίσωσης πρώτου και δεύτερου βαθμού Νέες Έννοιες: ✓ Επίλυση εξίσωσης με απόλυτες τιμές ✓ Η εξίσωση $x = \varepsilon, \varepsilon > 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x = \pm \varepsilon, \varepsilon > 0$, ενώ δεν έχει λύση όταν το $\varepsilon < 0$	Παραδείγματα: <i>Εξισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές</i> • Να λύσετε τις εξισώσεις (αλγεβρικά και γραφικά): (α) $x + 3 = 9$ (β) $x - 2 = -9$ • (α) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x + 1$ και $g(x) = 3 - x^2$. (β) Να λύσετε την εξίσωση $x + 1 = 3 - x^2$. (γ) Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $x + 1 = \frac{1}{2} - x^2$ δεν έχει πραγματικές	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ γραφικές παραστάσεις, για να επιλύσω εξισώσεις, ανισώσεις και για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + x - 5$, για να: (α) βρείτε το πεδίο ορισμού της (β) βρείτε το σύνολο τιμών της (γ) γράψετε την f χωρίς απόλυτα (δ) λύσετε την ανίσωση $x - 1 + x - 5 \leq 8$ και την εξίσωση $x - 1 + x - 5 = \frac{1}{2}x + 6$

		λύσεις.	 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Σε πόσα διαφορετικά τμήματα είναι χωρισμένη η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + x - 5$; • Γιατί είναι εύκολο να γράψουμε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς απόλυτα με τη χρήση της γραφικής παράστασης; • Πώς η γραφική παράσταση μας βοηθά να λύσουμε εξισώσεις και ανισώσεις;
	2.2 Επιλύουν ανισώσεις με απόλυτες τιμές αλγεβρικά και γραφικά. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Επίλυση ανισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού Νέες Έννοιες: ✓ Η ανίσωση $x < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ έχει λύση κάθε αριθμό στο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ενώ η ανίσωση $x > \varepsilon$ έχει λύση κάθε αριθμό ο οποίος ανήκει στην ένωση των	Παράδειγμα: Ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές • Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις (αλγεβρικά και γραφικά): (α) $x + 3 < 9$ (β) $x - 2 > 5$ (γ) $2x - 3 < -2$ (δ) $2x - 3 > -2$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. Επεξηγώ τη σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς. Παράδειγμα: Να εξηγήσετε πώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 1 - x$ και $g(x) = 3 x$ είναι δυνατόν να βοηθήσουν στην επίλυση της ανίσωσης $3 x \leq 1 - x$.

	διαστημάτων $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$		 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι μου δείχνουν οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων; • Τι παρατηρώ για τις δύο γραφικές στο διάστημα στον άξονα των x που ορίζεται μεταξύ των σημείων τομής;
3. Πεδίο ορισμού - σύνολο τιμών και συναρτήσεις 1 – 1 (A6.1) Ορίζουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών συνάρτησης και αναγνωρίζουν πότε ορίζεται ή όχι συνάρτηση. Ορίζουν τις συναρτήσεις που είναι 1-1 ή και επί, και προσδιορίζουν το πεδίο ορισμού.	3.1 Αναγνωρίζουν πότε ορίζεται μία συνάρτηση, όταν δίνεται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπως βελοδιάγραμμα, τύπος και γραφική παράσταση. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια συνάρτησης ✓ Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών ✓ Αναπαραστάσεις συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Γράφημα συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης $f: A \rightarrow B$	Παραδείγματα: Αναγνώριση συνάρτησης ➤ Με βελοδιάγραμμα • Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα με κατάλληλο βελοειδές διάγραμμα το οποίο να μην αποτελεί συνάρτηση. ➤ Με τύπο συνάρτησης • Ποιοι από τους πιο κάτω τύπους αποτελούν συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (α) $y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ (β) $y^2 = 4x, x \geq 0$ (γ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, -2 \leq x \leq 2, y \geq 0$ ➤ Με γραφική παράσταση • Ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις αποτελούν συνάρτηση	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα. Παράδειγμα: (α) Να δώσετε τον ορισμό του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μίας συνάρτησης. (β) Να εξηγήσετε πώς από μία γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της και το αντίστοιχο σύνολο των τιμών της. (γ) Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα άρρητης συνάρτησης, η οποία να έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο των τιμών της.

		με ανεξάρτητη μεταβλητή το x; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.  The top graph shows a green sine wave on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -2 to 8, and the y-axis ranges from -1 to 1. The wave starts at the origin (0,0), reaches a peak at approximately (2, 1), crosses the x-axis at approximately (3.5, 0), reaches a trough at approximately (5, -1), and crosses the x-axis again at approximately (6.5, 0). The bottom graph shows a blue circle on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -2 to 4, and the y-axis ranges from -2 to 2. The circle is centered at (1, 0) with a radius of 2. It passes through the points (-1, 0), (3, 0), (1, 2), and (1, -2). A small blue 'c' is labeled near the top-left of the circle.	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς ελέγχουμε αν μία γραφική παράσταση αποτελεί ή όχι συνάρτηση; • Πώς μπορούμε να παραλληλίσουμε ένα βελοειδές διάγραμμα με μία γραφική παράσταση σε σύστημα συντεταγμένων;
	3.2 Βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών συνάρτησης, όταν δίνεται ο τύπος της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια Συνόλου ✓ Συνάρτηση με τύπο Νέες Έννοιες: ✓ Πεδίο Ορισμού συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ Συμβολισμοί: $D(f)$, A_f ✓ Σύνολο τιμών συνάρτησης f Συμβολίζεται με $f(A)$ και ισχύει $f(A) \subseteq B$.	Παραδείγματα: <i>Εύρεση πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών συνάρτησης που δίνεται με τύπο</i> • Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων που δίνονται από τους τύπους: (α) $f(x) = 3x - 2$ (β) $g(x) = \sqrt{2x - 6}$ (γ) $h_1(x) = \frac{x}{x-3}$ (δ) $h_2(x) = \frac{x}{x-3}, x \geq 5$	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ γραφικές παραστάσεις, για να βρω το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και γενικά, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης με την πιο κάτω γραφική παράσταση:

	Παρατήρηση: ✓ Όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης και ζητείται να βρούμε το πεδίο ορισμού βρίσκουμε το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο (το ευρύτερο) τιμών του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$ να ανήκει στο $\mathbb{R}$.		 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Αν όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης προβληθούν πάνω στον άξονα των x, ποιο σύνολο μας δίνουν; • Πώς μπορώ να προσδιορίσω ανάλογα και το σύνολο τιμών;
3.3 Ορίζουν τις συναρτήσεις που είναι 1-1 Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Αριθμητική τιμή συνάρτησης ✓ Πρότυπα και εικόνες μιας συνάρτησης ✓ Μέθοδος με απαγωγή σε άτοπο Νέες Έννοιες: ✓ Ένα προς ένα (ή 1 – 1) Παρατήρηση: Λεκτικά: • Διαφορετικά πρότυπα να δίνουν διαφορετικές εικόνες.	Παράδειγμα: Αναγνώριση 1 – 1 συνάρτησης • Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. (α) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι 1 – 1. (β) Να ορίσετε κατάλληλο πεδίο ορισμού ώστε η συνάρτηση να είναι 1 – 1. (γ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο πάνω συναρτήσεων και να ερμηνεύσετε γραφικά την 1 – 1 συνάρτηση.		ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα. Παράδειγμα: (α) Να δώσετε τον ορισμό της 1 – 1 συνάρτησης και να αναφέρετε ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι 1 – 1 και ένα παράδειγμα που να μην είναι. (β) Ποια είναι η γραφική ερμηνεία και πώς διακρίνεται μία 1 – 1 συνάρτηση από μία άλλη η οποία δεν είναι 1 – 1. (γ) Αν πάρουμε ένα $y \in f(A)$, πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = y$; (δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2^{x+1} + 3, x \in \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, ενώ η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 3$ δεν είναι.

	Συμβολικά: (Με δύο ισοδύναμους ορισμούς) • $\forall x_1, x_2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ • $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Γραφικά: • Κάθε ευθεία παράλληλη προς τον Ox τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα το πολύ σημείο.		Απαντώ στην ερώτηση: • Πόσα σημεία τομής πρέπει να έχει μία «οριζόντια» (παράλληλη προς τον Ox) ευθεία με μία γραφική παράσταση συνάρτησης, η οποία δεν είναι $1 - 1$;
4. Αντίστροφη συνάρτηση (Α6.9) Εξετάζουν τις συνθήκες ύπαρξης της αντίστροφης μιας δεδομένης συνάρτησης, βρίσκουν την αντίστροφη συνάρτηση και μελετούν τη σχέση των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων.	4.1 Εξετάζουν τις συνθήκες ύπαρξης της αντίστροφης μιας δεδομένης συνάρτησης και βρίσκουν την αντίστροφη συνάρτηση Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ $1 - 1$ συνάρτηση Νέες Έννοιες: ✓ Ορισμός αντίστροφης συνάρτησης ✓ Ιδιότητες αντίστροφης συνάρτησης ✓ Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης, όταν δίνεται ο τύπος της	Παραδείγματα: <i>Αντίστροφη συνάρτηση</i> • Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ δεν ορίζεται αντίστροφη, αιτιολογώντας την απάντησή της. Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης g με τον ίδιο τύπο, η οποία να έχει αντίστροφη. • Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = 2x + 3, x \in [-1, 3]$ και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(t) = \frac{5}{2}$.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. <i>Επεξηγώ τη σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: «Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις αντίστροφη συνάρτηση». Να αναπτύξετε τον πιο πάνω ισχυρισμό και να αναφέρετε αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε, αιτιολογώντας τη σκέψη σας δίνοντας παράλληλα και ένα παράδειγμα συνάρτησης με τύπο που να μην έχει αντίστροφη. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Γιατί μια συνάρτηση ενδεχομένως να μην έχει αντίστροφη; Πώς με ένα βελοειδές παράδειγμα μπορούμε να στηρίξουμε τον ισχυρισμό; • Πώς μπορούμε να στηρίξουμε τον ισχυρισμό, κάνοντας μία γραφική παράσταση;

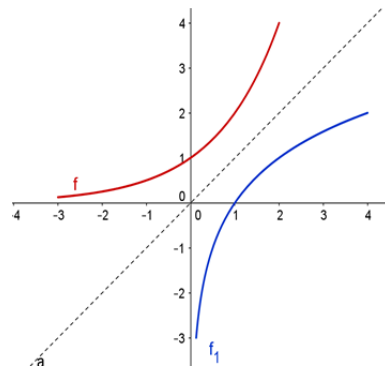
4.2 Μελετούν τη σχέση των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- ✓ Γραφική Παράσταση συνάρτησης
- ✓ Συμμετρία ως προς ευθεία

Νέες Έννοιες:

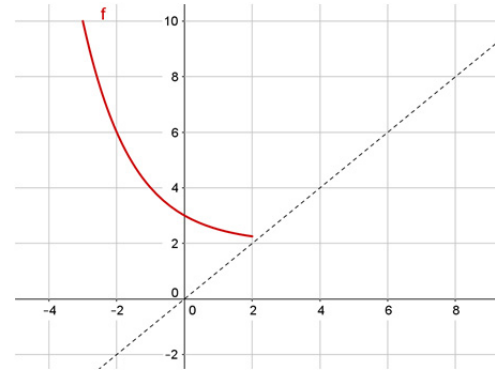
- ✓ Γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και της αντίστροφης της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



Παραδείγματα:

Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}

- Να σχεδιάσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f στην πιο κάτω γραφική παράσταση και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(6)$.

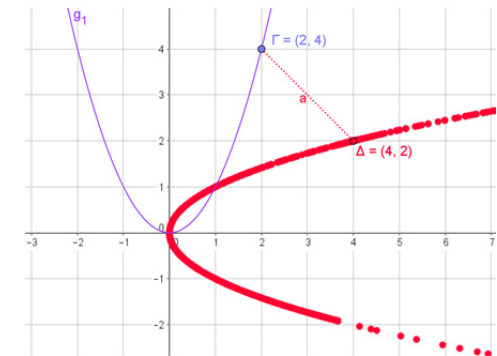


ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων.

Χρησιμοποιώ εργαλεία των

Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.

Παράδειγμα: Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.



- (α) Να βρείτε 5 διαφορετικά σημεία της g_1 .
- (β) Να κατασκευάσετε τα αντίστοιχα σημεία των πέντε σημείων, αντιστρέφοντας τον «ρόλο» των x, y .
- (γ) Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της καμπύλης, που προκύπτει από τη πιο πάνω διαδικασία
- (δ) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α), (β) και (γ) με περισσότερα σημεία.
- (ε) Αποτελεί κατά τη γνώμη σας συνάρτηση η νέα καμπύλη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απαντώ στην ερώτηση:

- Ποιο είδος συμμετρίας παρουσιάζουν οι δύο γραφικές παραστάσεις;

5. Ίσες συναρτήσεις και πράξεις με συναρτήσεις (Α6.2) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων και τις πράξεις συναρτήσεων.	5.1 Μελετούν την ισότητα δύο συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Εύρεση Πεδίου Ορισμού συνάρτησης όταν δίνεται ο τύπος της. Νέες Έννοιες: ✓ Ίσες συναρτήσεις: Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$. <i>Σημείωση:</i> • Μπορεί δυο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο να είναι ίσες και δύο άλλες συναρτήσεις με τον ίδιο τύπο να μην είναι ίσες.	Παραδείγματα: <i>Ίσες συναρτήσεις</i> • Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-9}{ x -3}$ και $g(x) = x + 3$ είναι ίσες. Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f = g$. • Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2, x \in \{-1,0,1\}$ και $g(x) = x^4, x \in \{-1,0,1\}$ είναι ίσες μεταξύ τους. Ποιο σημείο αξίζει σχολιασμό στην πιο πάνω ισότητα των δύο συναρτήσεων;	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: (α) Πότε δύο συναρτήσεις οι οποίες έχουν ακριβώς τον ίδιο τύπο, δεν είναι ίσες; Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα. (β) Πότε δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο μπορεί να είναι ίσες; Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιος είναι ο ακριβής ορισμός της ισότητας δύο συναρτήσεων; • Ποιο από τα δύο βασικά στοιχεία του ορισμού της ισότητας δεν ισχύει για το (α); • Τι πρέπει να έχουν απαραίτητα οι δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο για να είναι ίσες;
	5.2 Ορίζουν και να εφαρμόζουν τις τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Πράξεις με πολυώνυμα ✓ Πράξεις με ρητά κλάσματα ✓ Τομή δύο συνόλων Νέες Έννοιες: ✓ Πράξεις με συναρτήσεις Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A \cap B \neq \emptyset$ ορίζουμε: ➤ Το άθροισμα των	Παράδειγμα: <i>Πράξεις συναρτήσεων</i> • Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$, όταν: (α) $f(x) = x^2 - 9$ και $g(x) = x + 3$ (β) $f(x) = 3x + 1, x \in [0,3)$ και $g(x) = 2x - 4, x \in (1,5]$	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.

συναρτήσεων $f + g$ με
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in A \cap B$.

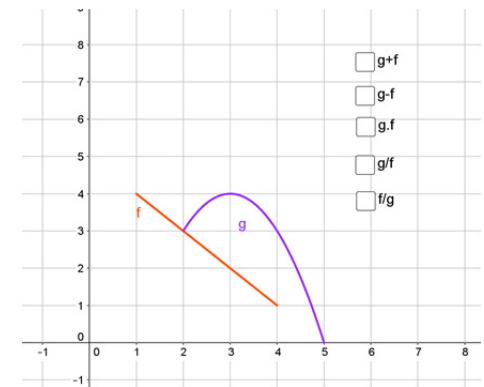
➤ Τη διαφορά των συναρτήσεων $f - g$ με
 $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in A \cap B$.

➤ Το γινόμενο των συναρτήσεων $f \cdot g$ με
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A \cap B$.

➤ Το πηλίκο των συναρτήσεων $\frac{f}{g}$ με
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$
 $x \in A \cap B, g(x) \neq 0$.

Παρατήρηση:

- Γραφικά η συνάρτηση $f + g$ αποτελείται από τα σημεία $(\alpha, f(\alpha) + g(\alpha))$ για όλα τα $\alpha \in A \cap B$.



(α) Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g .

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές:

➤ $f(2) + g(2)$,

➤ $g(3) - f(3)$

➤ $g(4) \cdot f(4)$

➤ $\frac{g(4)}{f(4)}$

➤ $\frac{f(2)}{g(2)}$

➤ $\frac{f(2)}{g(2)}$

(γ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω

συναρτήσεων, οι οποίες

δημιουργούνται από τις f και g :

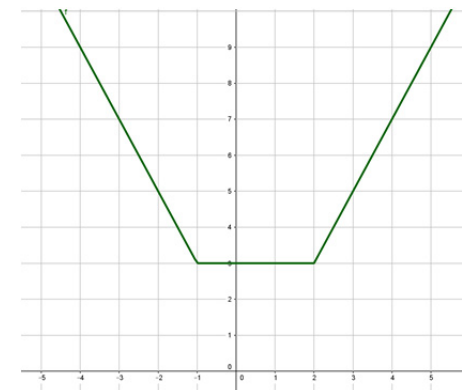
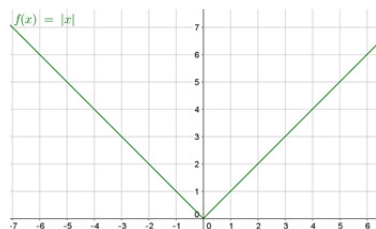
$h = g + f$, $p = g - f$, $q = g \cdot f$,

$r = \frac{g}{f}$ και $s = \frac{f}{g}$

(δ) Να αναφέρετε κατά πόσο το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων h, p, q, r και s διαφέρει από το πεδίο ορισμού των δύο αρχικών συναρτήσεων f και g .

(ε) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[B_Lyk_NeesSynartiseis2.ggb](#)» και να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας.

			(στ) Μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές $f(2) + g(2)$, $f(3) + g(3)$, $f(4) + g(4)$, $f(5) - g(5)$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (ζ) Να βρείτε τον τύπο της κάθε νέας συνάρτησης, αν γνωρίζετε ότι η f είναι γραμμική εξίσωση και η g έχει τύπο δευτεροβάθμιου τριωνύμου. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Σε ποιες περιπτώσεις κάποιο άθροισμα της μορφής $f(a) \pm g(a)$ ενδεχομένως και να μην ορίζεται; • Ποιο είναι το πιο σημαντικό σημείο που πρέπει να προσεχθεί, για να ορισθεί ένα στοιχείο της μορφής $f(x) \pm g(x)$; • Τι επιπλέον πρέπει να προσέξω κατά τον ορισμό του $\frac{f(a)}{g(a)}$;
6. Συναρτήσεις με απόλυτες τιμές (Α6.7) Μελετούν συναρτήσεις με απόλυτες τιμές, τις μετασχηματίζουν σε τμηματικές συναρτήσεις και κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	6.1 Μελετούν και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με απόλυτες τιμές. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Γραφικές παραστάσεις ευθειών ✓ Γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ Νέες Έννοιες: ✓ Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής. Η συνάρτηση $f(x) = x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ και η γραφική της παράσταση:	Παράδειγμα: <i>Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές</i> • Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, αφού πρώτα τις μετασχηματίσετε σε τμηματικές: (α) $f(x) = x + 2$ (β) $g(x) = x + x - 1$ (γ) $h(x) = x^2 + x - 2$	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Να χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, για να γράψετε τον τύπο της με δύο διαφορετικούς τύπους. Ο ένας τύπος να περιέχει απόλυτες τιμές και να έχει τη μορφή $f(x) = ax + \beta + \gamma x + \delta$, $x \in \mathbb{R}$.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Πόσα διαφορετικά διαστήματα υπάρχουν κατά τα οποία αλλάζει τύπο η συνάρτηση;
- Ποια μορφή πρέπει να έχει ο κάθε τύπος σε κάθε διάστημα που ορίσατε;
- Αν δεχθούμε ότι σε κάθε διάστημα η συνάρτηση $f(x) = |ax + \beta| + |\gamma x + \delta|, x \in \mathbb{R}$ έχει συγκεκριμένο τύπο, πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τα α, β, γ και δ ;

7. Σύνθεση συνάρτησης (A6.8) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων

7.1 Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- ✓ Πράξεις με συναρτήσεις
- ✓ Συναλήθευση ανισώσεων

Νέες Έννοιες:

- ✓ Σύνθεση συναρτήσεων

Σχόλιο:

- Η σύνθεση $g \circ f$ δεν ορίζεται όταν το σύνολο

Παραδείγματα:

Σύνθεση συναρτήσεων

- Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2$

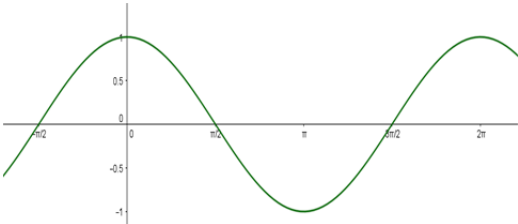
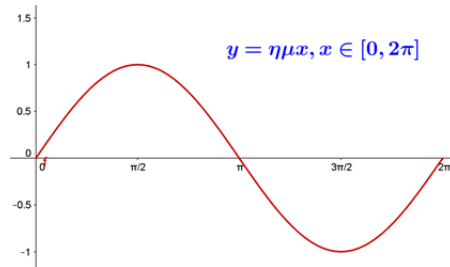
(β) $f(x) = 2x - 3, x \in [0, 4]$ και $g(x) = x^2, x \in [-1, 3]$

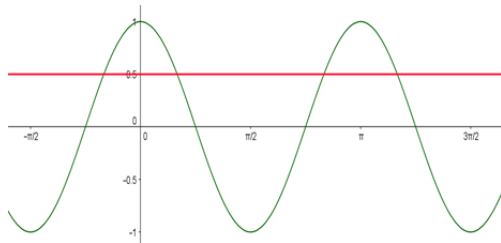
ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Δύο μαθητές A και B παίζουν το εξής παιχνίδι με αριθμούς. Επιλέγουν ένα τυχαίο πραγματικό αριθμό και τον αλλάζουν, σύμφωνα με ένα δικό τους κανόνα τον οποίο αποφάσισαν οι ίδιοι για τον εαυτό τους. Οι κανόνες των δύο μαθητών είναι οι εξής:

	$A' = \{x \in A / f(x) \in B\}$ είναι κενό. ➤ Η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται για όλα τα $x \in A$ όταν $f(A) \subseteq B$.		A: «διπλασιάζει τον αριθμό και τον αυξάνει κατά 1» B: «υψώνει τον αριθμό στο τετράγωνο και τον μειώνει κατά 1» Επιλέγουν τον αριθμό 3. (α) Να υπολογίσετε τον αριθμό που προκύπτει από τον κάθε ένα κανόνα των δύο παιδιών. Στη συνέχεια ο κάθε μαθητής δίνει τον αριθμό του που έχει προκύψει από τον αριθμό 3 στον άλλο μαθητή, για να εφαρμόσει εκ νέου τον κανόνα του. (β) Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό που έχει ο κάθε μαθητής. (γ) Στον A δίνεται ένας άγνωστος αριθμός x και εφαρμόζει τον κανόνα του. Το αποτέλεσμα που βρίσκει, το δίνει στον B, όπου εφαρμόζει και αυτός τον δικό του κανόνα και ανακοινώνει τελικό αποτέλεσμα τον αριθμό 99. Ποιος είναι ο άγνωστος αριθμός x; Είναι μοναδικός ο αριθμός x; (δ) Ποιος θα ήταν ο αριθμός x στο ερώτημα (γ) αν ο αριθμός δινόταν πρώτα στον B και στο τέλος ο αριθμός που ανακοινώνει ο A είναι ο 50; Απαντώ στην ερώτηση: • Ποια έννοια είναι «κρυμμένη» στην εξαγωγή ενός αριθμού ύστερα από δύο διαδοχικές διαδικασίες;
--	--	--	--

8. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (Α6.16) Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε σχέση με τον τριγωνομετρικό κύκλο και επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.	8.1 Ορίζουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί τυχαίας γωνίας Νέες Έννοιες: ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις ✓ Τριγωνομετρικές εξισώσεις	Παραδείγματα: <i>Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων</i> • Να κάνετε της γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\tau\epsilon\mu x$ στο ευρύτερο πεδίο ορισμού της. • Να αναγνωρίσετε τη συνάρτηση στην πιο κάτω γραφική παράσταση, αιτιολογώντας την απάντησή σας. 	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό <i>Βλέπω επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς και αναζητώ γενικεύσεις και σύντομες λύσεις. Παρατηρώ την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και είμαι σε θέση να τις διατυπώνω με εναλλακτικό τρόπο.</i> Παραδείγματα: Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$. (α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τη συνάρτηση $y = \eta\mu x, x \in [-4\pi, 6\pi]$. (β) Πώς θα είναι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g(x) = \eta\mu 2x, x \in [0, 2\pi]$ και $h(x) = \eta\mu 3x, x \in [0, 2\pi]$; (γ) Ποια γενική παρατήρηση μπορεί να γίνει για τη γραφική παράσταση της $y = \eta\mu(\nu x), x \in [0, 2\pi], \nu \in \mathbb{N}$, όσο αυξάνεται η τιμή του ν;  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $y = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$;
---	---	--	---

			Πώς αλλάζει η περιοδικότητα της συνάρτησης $y = \eta\mu(\nu x)$, $x \in [0, 2\pi]$, όσο το ν αυξάνει;
	8.2 Να επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί Νέες Έννοιες: ✓ Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων που ανάγονται στη μορφή: ➤ $\eta\mu x = c$ ➤ $\sigma\upsilon\nu x = c$ ➤ $\epsilon\varphi x = c$	Παραδείγματα: Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων • Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $\eta\mu x = 2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει λύσεις. • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ (β) $\sigma\upsilon\nu 3x = 1,2$, $x \in \mathbb{R}$ (γ) $2\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 1 = 0$, $x \in [-\pi, \pi)$ • Να χρησιμοποιήσετε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $y = \frac{1}{2}$, για να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση Χρησιμοποιώ Μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ.), για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσω προβλήματα. Παράδειγμα: Ένα σώμα κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει 1,4 m από το έδαφος. Όταν το σώμα αρχίζει να ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του σε m από το πάτωμα δίνεται από την εξίσωση: $h = 1,4 + 0,6 \cdot \eta\mu 2t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. (α) Να υπολογίσετε τη διαφορά μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου ύψους. (β) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{12}$. (γ) Ποια χρονική στιγμή ($0 \leq t \leq 2\pi$) το σώμα βρίσκεται σε ύψος 1,8 m; (δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της $h = 1,4 + 0,6 \cdot \eta\mu 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες εξισώσεις προκύπτουν, όταν $t = \frac{\pi}{12}$ ή όταν $h = 1,8$; • Είναι μοναδικές οι λύσεις των εξισώσεων;
9. Επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τριγωνομετρία (Α6.18) Εφαρμόζουν τις έννοιες	9.1 Χρησιμοποιούν νόμο ημιτόνων και συνημιτόνων για επίλυση πραγματικών	Παραδείγματα: Επίλυση προβλημάτων • Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να φέρετε το ύψος AD.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

και τις μεθόδους της τριγωνομετρίας στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.	προβλημάτων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί οξείας γωνίας ✓ Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο Νέες Έννοιες ✓ Νόμος των ημιτόνων σε τυχαίο τρίγωνο $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$ ✓ Νόμος συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$	(α) Να εκφράσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους το ύψος AD συναρτήσει κύριων στοιχείων του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα ABD και AGD. (β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$. (γ) Πώς θα αποδείξουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$	Παράδειγμα: Δύο κρουαζιερόπλοια ξεκινούν την ίδια ώρα από το λιμάνι της Λεμεσού. Το ένα κατευθύνεται με ταχύτητα 60 km/h προς το Λίβανο και το άλλο με ταχύτητα 70 km/h προς το Ισραήλ. Αν η γωνία μεταξύ των δύο δρομολογίων είναι 28°, να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο πλοίων σε 2 ώρες.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα; • Τι προσπαθώ να βρω; • Ποια στρατηγική ακολουθώ, για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πως ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
10.Ακολουθίες πραγματικών αριθμών (A7.1) Αναφέρουν τον ορισμό της ακολουθίας και βρίσκουν τους	10.1 Αναφέρουν τον ορισμό της ακολουθίας και βρίσκουν τους όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός	Παράδειγμα: <i>Ορισμός ακολουθίας και εύρεση όρων της</i> • Να γράψετε τους πέντε πρώτους	ΜΠ.2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Κατανοώ σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ διαδοχικών όρων ακολουθίας, συμβολίζω με αναδρομικό τύπο μία ακολουθία και τον ερμηνεύω λεκτικά.</i>

όρους της, όταν δίνεται ο γενικός όρος ή ο αναδρομικός τύπος.	τύπος της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Το σύνολο των φυσικών αριθμών ✓ Έννοια συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Ορισμός ακολουθίας: Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών. Συμβολικά έχουμε $a: N \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ και γράφουμε πιο απλά, $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ή ακόμα $a_1, a_2, a_3, \dots$ ✓ Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού μιας ακολουθίας, δηλαδή τα πρότυπα της συνάρτησης, τα λέμε δείκτες και τις εικόνες των δεικτών όρους της ακολουθίας.	όρους των πιο κάτω ακολουθιών: (α) $a_n = \frac{2}{n+4}$ (β) $a_n = 2(-1)^{n+1}$ (γ) $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 2$ • Να γράψετε ένα αναγωγικό τύπο για τις ακολουθίες που δίνονται οι πέντε πρώτοι όροι τους: (α) 2,5,8,11,14,17, ... (β) 2,6,18,54,162, ...	Παράδειγμα: Η γνωστή ακολουθία Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13, 21, 34, ...είναι «δύσκολο» να εκφραστεί με ένα κλειστό τύπο, ο οποίος να μας δίνει το γενικό όρο της ακολουθίας. Ωστόσο, μπορούμε να εκφράσουμε τον κάθε όρο της δίνοντας κατάλληλο αναδρομικό (αναγωγικό) τύπο: (α) Να γράψετε τους τρεις επόμενους όρους της ακολουθίας, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (β) Να εκφράσετε λεκτικά τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει κάθε όρος μετά τον δεύτερο όρο της. (γ) Ποιο αναγωγικό τύπο μπορούμε να δώσουμε, για να εκφράσουμε τον γενικό τύπο της ακολουθίας Fibonacci; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιο κανόνα ακολουθεί ένας όρος της ακολουθίας σε σχέση με τους προηγούμενους του; • Ο κανόνας αυτός ισχύει και για τους δύο πρώτους όρους της ακολουθίας; • Αν ένας τυχαίος όρος της ακολουθίας συμβολισθεί με a_n, πώς μπορούμε να συμβολίσουμε τον προηγούμενό του;
11.Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες (A7.2) Ορίζουν και εφαρμόζουν τις έννοιες μονοτονία ακολουθίας, φραγμένη ακολουθία και το όριο ακολουθίας.	11.1. Ορίζουν και να εφαρμόζουν τη μονοτονία ακολουθίας. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός ακολουθίας ✓ Συμβολισμός γενικού όρου ακολουθίας Νέες Έννοιες: ✓ Μονοτονία ακολουθίας	Παράδειγμα: <i>Μονοτονία Ακολουθίας</i> • Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{3}{n+2}$ είναι γνησίως φθίνουσα. • Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα μιας γνήσια αύξουσας ακολουθίας.	ΜΠ.2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Κατανοώ σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ διαδοχικών όρων ακολουθίας και επιλέγω την κατάλληλη μέθοδο για τον προσδιορισμό της μονοτονίας μιας ακολουθίας.</i> Παράδειγμα: Να αποφασίσετε για το είδος της μονοτονίας των πιο κάτω ακολουθιών, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που προτείνεται σε κάθε περίπτωση:

	Σημείωση: ✓ Σε μια γνήσια αύξουσα ακολουθία κάθε επόμενος όρος της είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του π.χ. 1,4,7,10, ... $3n + 1$, ... ✓ Σε μια αύξουσα ακολουθία κάθε επόμενος όρος της είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον προηγούμενο του) π.χ. 1,2,2,3,4,4,5,6,6, ... ✓ Σε μια σταθερή ακολουθία κάθε επόμενος όρος της είναι ίσος με τον προηγούμενο του π.χ. 3,3,3,3, ... ✓ Μια ακολουθία η οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται μονότονη. ✓ Το πρόσημο του $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$ μπορεί να αποτελέσει εργαλείο για τη μονοτονία μιας ακολουθίας.		(α) $a_n = \frac{3^n}{n+1}$ (μέθοδος διαφοράς, δηλαδή να εξετάσετε το πρόσημο της διαφοράς $\Delta_n = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$). (β) $a_n = 2n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$ (μέθοδος λόγου, δηλαδή να συγκρίνεται το λόγο $\Lambda_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ με τη μονάδα). (γ) $a_{n+1} = a_n^2 + 2, a_1 = 1$ (μέθοδος τέλειας επαγωγής). (δ) $a_n = (-2)^n$ (με αντιπαράδειγμα). Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι πρόσημο πρέπει να έχει η διαφορά $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$, αν η ακολουθία είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα); • Τι πρόσημο πρέπει να έχουν όλοι οι όροι μια ακολουθίας, ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του λόγου; • Τι συμβαίνει στην περίπτωση κατά την οποία $\Lambda_n \leq 1$ ή $\Lambda_n \geq 1$; • Γιατί με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής μπορούμε να αποφασίσουμε για το είδος της μονοτονίας; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία δεν έχει κανένα είδος μονοτονίας; Πώς με ένα απλό αντιπαράδειγμα μπορούμε να το δείξουμε;
	11.2 Ορίζουν τη φραγμένη ακολουθία, καθώς και την κάτω, ή άνω φραγμένη ακολουθία.	Παραδείγματα: <i>Φραγμένες ακολουθίες</i> • Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες ή όχι. Να κάνετε αναφορά σε κάτω ή άνω	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Δίνεται η ακολουθία με

	Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Ιδιότητες ανισοτικών σχέσεων στους πραγματικούς αριθμούς ✓ Επίλυση ανισώσεων Νέες Έννοιες: ✓ Φραγμένη ακολουθία • Μία ακολουθία a_n είναι φραγμένη όταν υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί κ, λ, ώστε να ισχύει $\kappa \leq a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$. Πιο ειδικά μπορούμε να γράψουμε $a_n \leq \theta, \theta \in \mathbb{R}$. • Μία ακολουθία a_n είναι άνω φραγμένη όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$. • Μία ακολουθία a_n είναι κάτω φραγμένη όταν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\kappa \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.	φραγμένη ακολουθία σε περίπτωση που η ακολουθία δεν είναι φραγμένη: (α) $a_n = n^2 + 1$ (β) $\beta_n = \frac{3n+1}{3n+2}$ (γ) $\gamma_n = 5 - 2^n$ (δ) $\delta_n = \frac{2n\pi}{n^2}$	γενικό τύπο $a_n = 4 - \frac{3}{n}$ (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα και να εξηγήσετε τι σημαίνει αυτό (β) Να αποδείξετε ότι είναι κάτω φραγμένη. (γ) Να αποδείξετε ότι ακολουθία είναι και άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα το 5. (δ) Είναι το μοναδικό άνω φράγμα; (ε) Υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα; (στ) Τι μας εξασφαλίζει για την ακολουθία η φράση «αύξουσα και φραγμένη»; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς μπορούμε να εκφράσουμε λεκτικά το «γνησίως αύξουσα»; • Αφού μια ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα, ποιος πρέπει να είναι ο μικρότερος όρος της και τι αποτελεί για την ακολουθία ο όρος αυτός; • Τι αποτελεί για την ακολουθία το ελάχιστο άνω φράγμα;
	11.3. Ορίζουν τη συγκλίνουσα ακολουθία και να υπολογίζουν το όριο της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Μονότονες ακολουθίες ✓ Φραγμένες Ακολουθίες Νέες Έννοιες: ✓ Συγκλίνουσα ακολουθία ✓ Όριο ακολουθίας ✓ Βασικά θεωρήματα στις	Παραδείγματα: <i>Σύγκλιση ακολουθίας</i> • Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{2}{n}$ συγκλίνει στο μηδέν. • Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = 2n + 1$ έχει όριο το $+\infty$, ενώ η ακολουθία $\beta_n = -n^2$ έχει όριο το $-\infty$.	ΜΠ.2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Κατανοώ σχέσεις και συμβολισμούς μεταξύ όρων ακολουθίας και αποδεικνύω ότι μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.</i> Παράδειγμα: Δίνεται η ακολουθία: $a_n = \frac{n+1}{n}$. Να βρείτε έναν δείκτη n_0, ώστε οι όροι της ακολουθίας για κάθε $n \geq n_0$ να έχουν απόσταση από τον αριθμό 1, μικρότερη από τον αριθμό:

	ακολουθίες είναι: ➤ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. ➤ Το γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης είναι μηδενική. ➤ Ιδιότητα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών: Αν ισχύει $\begin{cases} \beta_n \leq a_n \leq \gamma_n, \forall n \geq n_1 \\ \beta_n \rightarrow a \text{ και } \gamma_n \rightarrow a \end{cases}$, τότε $a_n \rightarrow a$. ➤ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.		(α) $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$ (β) $\varepsilon_2 = \frac{1}{100}$ (γ) $\varepsilon_3 = \frac{1}{10000}$ (δ) $\varepsilon_4 = \varepsilon, \varepsilon > 0$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς ερμηνεύουμε αλγεβρικά την απόσταση του όρου a_n από τον αριθμό 1; • Αν η ανίσωση της μορφής $a_n - 1 < \varepsilon$ καταλήξει στη λύση $n > f(\varepsilon)$, ποιος θα είναι ο «ρόλος» του $f(\varepsilon)$ στον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας; • Πώς λέγεται ο αριθμός 1 σε σχέση με την ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$; • Αν οι συγκεκριμένες τιμές των ε ταυτιστούν με την «επιθυμητή» ακρίβεια με την οποία θέλουμε να πλησιάζουμε κάθε φορά τον αριθμό 1, πώς θα διατυπώνατε ξανά τον ορισμό της σύγκλισης; • Αν παραστήσουμε γραφικά τα ζεύγη $(n, a_n), n \in \mathbb{N}$ σε σύστημα συντεταγμένων, τι θα παρατηρήσουμε;
12.Ειδικές ακολουθίες (Αριθμητική και Γεωμετρική Πρόοδος) (A7.3) Αναφέρουν και εφαρμόζουν τον ορισμό της προόδου (ως ειδική περίπτωση ακολουθιών) βρίσκουν το γενικό όρο και το άθροισμα των n	12.1 Ορίζουν την αριθμητική πρόοδο και να βρίσκουν τον γενικό όρο της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός ακολουθίας ✓ Ακολουθίες που ορίζονται με αναγωγικό τύπο ✓ Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = ax + \beta$	Παράδειγμα: Αριθμητική Πρόοδος • Μία αριθμητική πρόοδος έχει $a_1 = 3$ και $\delta = 4$. (α) Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας. (β) Να δώσετε τον αναδρομικό τύπο της προόδου. (γ) Να δώσετε τον γενικό όρο της	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάσω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Δίνεται ότι το άθροισμα των n –πρώτων όρων μιας ακολουθίας a_n είναι $\Sigma_n = \frac{1}{4}n^2 - n, n \in \mathbb{N}$. (α) Να υπολογίσετε τα Σ_{10} και Σ_{11}.

πρώτων όρων.	Νέες Έννοιες: ✓ Αριθμητική πρόοδος ➤ Ορισμός αριθμητικής πρόοδου ➤ Στοιχεία αριθμητικής πρόοδου ➤ Γενικός όρος αριθμητικής πρόοδου ➤ Άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων αριθμητικής πρόοδου	πρόοδου. (δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων της ακολουθίας.	(β) Να υπολογίσετε το $11^ο$ όρο της. (γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n είναι αριθμητική πρόοδος. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς συνδέεται το Σ_n με τους όρους της ακολουθίας a_n; • Πώς γράφεται ένας συγκεκριμένος όρος a_k της ακολουθίας συναρτήσει αθροισμάτων της ακολουθίας; • Πότε μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος;
	12.2 Ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο και να βρίσκουν τον γενικό όρο της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λόγος μεταξύ δύο αριθμών ✓ Αναλογία και ιδιότητες αναλογιών. Νέες Έννοιες: ✓ Γεωμετρική πρόοδος ➤ Ορισμός γεωμετρικής πρόοδου ➤ Στοιχεία γεωμετρικής πρόοδου ➤ Γενικός όρος γεωμετρικής πρόοδου ➤ Το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής πρόοδου. • Όταν $\lambda < 1$, το $\lim \Sigma_n = \frac{a_1}{1-\lambda}$ και τότε λέγεται ότι υπάρχει το άθροισμα των απείρων	Παράδειγμα: <i>Γεωμετρική πρόοδος</i> • Μία γεωμετρική πρόοδος έχει $a_1 = 2$ και $\lambda = 3$. (α) Να γράψετε της πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας. (β) Να δώσετε τον αναδρομικό τύπο της πρόοδου. (γ) Να δώσετε τον γενικό όρο της πρόοδου. (δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων της ακολουθίας. (ε) Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να υπάρχει το Σ_∞, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (στ) Να υπολογίσετε το Σ_∞ της γεωμετρικής πρόοδου με $a_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$.	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Χρησιμοποιώ Μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ.), για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Μία μπάλα πέφτει από ύψος 60 m και αναπηδά στο έδαφος, φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να υπολογίσετε: (α) σε πόσο ύψος θα φθάσει στην 5^η αναπήδηση (β) πόση είναι η συνολική απόσταση που διανύει η μπάλα μέχρι να σταματήσει <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιο αριθμητικό μοντέλο χρησιμοποιώ, για να αναπαραστήσω το πρόβλημα; • Ποιας ακολουθίας είναι οι όροι που προκύπτουν στο πρόβλημα; • Πώς παριστάνεται αλγεβρικά ένας

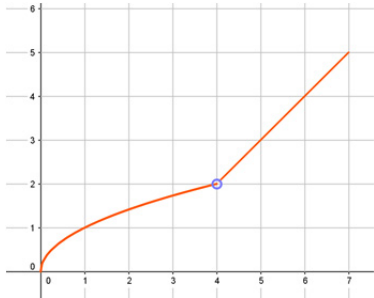
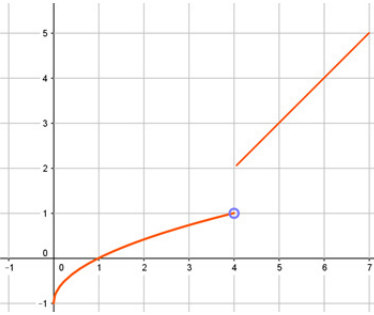
	όρων της Γεωμετρικής προόδου, το οποίο και συμβολίζεται με Σ_{∞} και ισούται με $\Sigma_{\infty} = \frac{a_1}{1-\lambda}$.		συγκεκριμένος όρος, όπως είναι ο 5^{ος}; • Ποια έννοια χρησιμοποιώ, για να υπολογίσω τη «συνολική απόσταση»;
13.Επίλυση προβλήματος με προόδους (Α7.4) Μοντελοποιούν και ερμηνεύουν λύσεις προβλημάτων, χρησιμοποιώντας ακολουθίες.	13.1 Μοντελοποιούν και να ερμηνεύουν λύσεις προβλημάτων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Στοιχεία αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου Νέες Έννοιες: ✓ Επίλυση προβλήματος αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου	Παράδειγμα: <i>Μοντελοποίηση</i> • Ένας αγρότης πληρώνει για τη γεώτρηση ως εξής: Το πρώτο μέτρο κοστίζει 6 ευρώ και κάθε επόμενο μέτρο κοστίζει 2 ευρώ περισσότερο από το κόστος του προηγούμενου μέτρου. (α) Πόσα κοστίζει το 10^ο μέτρο; (β) Σε πόσο βάθος μπορεί να φτάσει η γεώτρηση, αν ο αγρότης έχει στη διάθεσή του 750 ευρώ;	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου A ευρώ με ανατοκισμό $\varepsilon\%$. Να υπολογίσετε τα χρήματα που θα πάρουμε ύστερα από n χρόνια. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Για πόσα χρόνια θα ανατοκίζεται η πρώτη κατάθεση; • Για πόσα χρόνια θα ανατοκίζεται η δεύτερη κατάθεση; • Ποιο είναι το ποσό που θα αποφέρει η κάθε κατάθεση ύστερα από n χρόνια; • Ποια έννοια χρησιμοποιώ, για να υπολογίσω το συνολικό ποσό που θα προκύψει;
14.Σημείο συσσώρευσης - Μεμονωμένο σημείο συνόλου (Α7.6) Ορίζουν και εφαρμόζουν την έννοια του σημείου συσσώρευσης ενός συνόλου, του μεμονωμένου σημείου ενός συνόλου του ορίου συνάρτησης και τους αλγεβρικούς κανόνες	14.1 Ορίζουν το σημείο συσσώρευσης-και το μεμονωμένο σημείο συνόλου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Πραγματικοί αριθμοί ✓ Έννοια διαστήματος και ένωσης διαστημάτων ✓ Ιδιότητες διάταξης Πραγματικών Αριθμών	Παράδειγμα: <i>Σημείο συσσώρευσης και μεμονωμένο σημείο</i> • Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία συσσώρευσης και τα μεμονωμένα σημεία των συνόλων: $A = [0,3), B = \{0,2,4,6, \dots\},$ $\Gamma = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\},$ $\Delta = (0,5) \cup \{7\} \cup \{10\}$	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: (α) Να δώσετε τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης και του μεμονωμένου σημείου ενός συνόλου A. (β) Να εξηγήσετε με απλά λόγια πώς ένα σύνολο που περιέχει αριθμούς, όπως είναι το κλειστό διάστημα κάθε σημείο

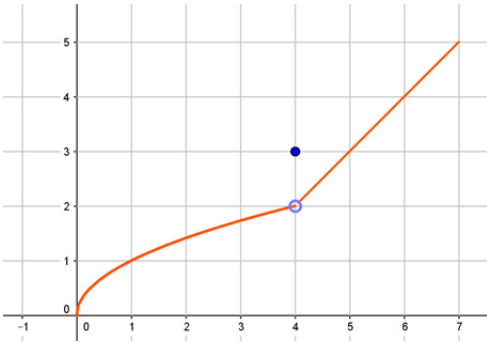
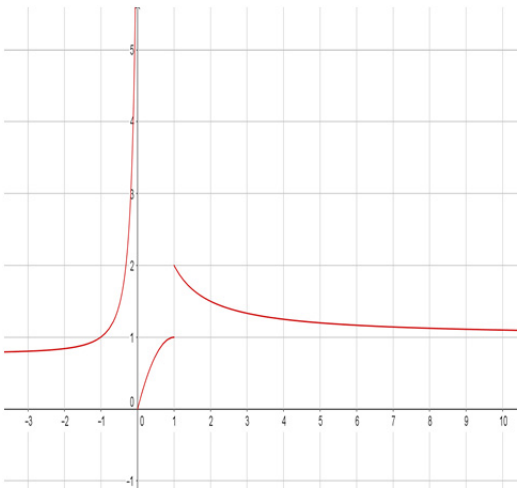
ορίων συναρτήσεων $(\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A της f, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$).	Νέες Έννοιες: ✓ Περιοχή ενός πραγματικού αριθμού a λέγεται το ανοικτό και φραγμένο διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$. Συμβολίζεται με $\pi(a)$ και έχει κέντρο το a και ακτίνα δ. Συμβολικά γράφουμε και $\pi(a) = \{x \in \mathbb{R} : x - a < \delta\}$. ✓ Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν κάθε περιοχή του a περιέχει άπειρα στοιχεία του A. ✓ Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται μεμονωμένο σημείο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνον αν υπάρχει περιοχή του a που δεν περιέχει άλλα στοιχεία του A εκτός από το a. Συμβολικά γράφουμε ότι ο αριθμός a είναι μεμονωμένο σημείο του A, αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $(\pi(a) - \{a\}) \cap A = \emptyset$.		του, είναι σημείο συσσώρευσης. (γ) Γιατί σε ένα ανοικτό διάστημα, όπως είναι το $B = (a, \beta)$, κάθε εσωτερικό του σημείο αλλά και τα δύο άκρα a, β είναι σημεία συσσώρευσης; (δ) Πώς μπορώ να αποδείξω ότι το σύνολο $\Gamma = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης αλλά μόνο μεμονωμένα σημεία; (ε) Γιατί το σύνολο $\Delta = (1, 4) \cup \{5\}$ έχει μόνο ένα μεμονωμένο σημείο ενώ έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Τι αναμένουμε να έχουμε, για να ονομάσουμε το a σημείο συσσώρευσης σε κάθε περιοχή του αριθμού a με οσοδήποτε «μικρή» ακτίνα, αν Δ είναι ένα διάστημα και $a \in \Delta$; • Αν στο σύνολο $\{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$ επιλέξω το 9 και δημιουργήσω την περιοχή του 9 με ακτίνα $\delta = 1$, τότε πόσα σημεία (εκτός του 9) του συνόλου περιέχονται στην $\pi(9) = (8, 10)$; • Τι σημαίνει αυτό για τη σχέση του 9 ως προς το σύνολο; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι το 5 είναι το μοναδικό μεμονωμένο σημείο;
	14.2 Δίνουν το ορισμό του ορίου συνάρτησης. Προαπαιτούμενες Γνώσεις ✓ Έννοια σημείου συσσώρευσης ✓ Όριο ακολουθίας Νέες Έννοιες: ✓ Όριο συνάρτησης:	Παράδειγμα: <i>Ορισμός ορίου</i> • Να αποδείξετε με χρήση του ορισμού ορίου συνάρτησης ότι: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ (β) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων. Παραδείγματα: (α) Να εκφράσετε λεκτικά και να εξηγήσετε γιατί η πρόταση $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5) = 11$ είναι αληθής.

	Αν a είναι ένα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού D_f μιας συνάρτησης f, τότε η f έχει όριο τον αριθμό λ στο σημείο a, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < x - a < \delta$, να έχουμε $f(x) - \lambda < \varepsilon$. Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$ Παρατηρήσεις: ✓ Για να έχει νόημα η μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης, με πεδίο ορισμού $D_f = A$, στο σημείο x_0 θα πρέπει απαραίτητα το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης. Να υπάρχει, δηλαδή, $\delta > 0$, ώστε η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο που να έχει τη μορφή $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, ή $(x_0 - \delta, x_0)$, ή $(x_0, x_0 + \delta)$. Θα πρέπει δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε διαφορετικά σημεία από το x_0 και όσοδήποτε κοντά στο x_0. ✓ Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε στο x_0 έχει όριο $+\infty$, όταν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$	(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Η ανίσωση $(2x - 5) - 11 < \varepsilon$ μπορεί να καταλήξει σε ανίσωση της μορφής $x - 3 < f(\varepsilon)$; • Ποια είναι η ζητούμενη τιμή του δ συναρτήσει του ε; (β) Να εξηγήσετε σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x), f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 7} f(x), f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x), f(x) = \frac{4x-8}{x^2-4}$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x),$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{5 - 4x - x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x),$ $f(x) = x^2, x = 1, 2, 3, 4, \dots$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορούμε να επεξηγήσουμε το γεγονός ότι για ένα στοιχείο a, που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, υπάρχει νόημα η μελέτη του ορίου $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$; • Πώς μπορούμε να επεξηγήσουμε το γεγονός ότι για ένα στοιχείο a, που ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, δεν υπάρχει νόημα η μελέτη του ορίου $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
--	--	--	---

	τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \pi(x_0)$ να ισχύει $f(x) > M$. Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ✓ Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε στο x_0 έχει όριο $-\infty$, όταν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \pi(x_0)$ να ισχύει $f(x) < -M$. Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$		
	14.3. Χρησιμοποιούν αλγεβρικούς κανόνες ορίων και να εκτελούν πράξεις μεταξύ των ορίων. Προαπαιτούμενες Γνώσεις ✓ Έννοια ορίου Νέες Έννοιες: ✓ Πράξεις ορίων	Παραδείγματα: <i>Πράξεις ορίων</i> • Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 2)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} ((x - 2)^{2015} (x^3 + 6x - 2))$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9}{2x + 6}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{(x^3 + x + 6)}$. (ε) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta \mu x}{2x + 6}$	ΜΠ.7 Δομή των Μαθηματικών <i>Εφαρμόζω γενικούς κανόνες Μαθηματικών σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και τους χρησιμοποιώ σε παρόμοιες καταστάσεις στον υπολογισμό ορίων συναρτήσεων.</i> Παράδειγμα: Δίνονται τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 10$ Να υπολογίσετε τα όρια: (α) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 2g(x)]$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)} \cdot (g(x))^2$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$, όταν ισχύει: $f(x) \leq h(x) \leq x^3 - x - 2$ <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Γιατί μπορούμε με ευκολία να χρησιμοποιήσουμε τους αλγεβρικούς

			κανόνες των ορίων; • Ποιο σημαντικό κριτήριο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο τελευταίο παράδειγμα;
15.Υπολογισμός ορίου αναλυτικά και γραφικά (Α7.23) Υπολογίζουν το όριο μιας συνάρτησης αναλυτικά, γραφικά και αριθμητικά	15.1 Υπολογίζουν αναλυτικά όρια συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες Γνώσεις ✓ Έννοια ορίου Νέες Έννοιες: ✓ Υπολογισμός ορίων Βασικά όρια: ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ ➤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = c$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$	Παράδειγμα: Υπολογισμός ορίου συνάρτησης αναλυτικά • Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια: ➤ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 3x}$ ➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 3^x}$ ➤ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x),$ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x > 2 \\ 10 - x^2, & x \leq 2 \end{cases}$	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων. Παράδειγμα: (α) Να δώσετε ενδεικτικές τιμές, χρησιμοποιώντας πίνακα τιμών, για να εικάσετε την τιμή των πιο κάτω ορίων. (β) Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή στα πιο κάτω όρια και να επεξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε i. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{3x - 18}$ ii. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 18}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες τιμές θα δίνετε στην περίπτωση κατά την οποία $x \rightarrow 6$; • Θα δίνετε την τιμή $x = 6$; • Σε ποια απροσδιόριστη μορφή καταλήγει το πρώτο όριο; • Που τείνει το $(x - 6)$, όταν $x \rightarrow 6$ και $A(x) \rightarrow 0$; Ποιον παράγοντα πρέπει να περιέχει το $A(x)$; • Ποιον αριθμό πλησιάζει η συνάρτηση $\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x - 18}$ για πολύ μεγάλες τιμές του x ($x \rightarrow \infty$);

			Είναι γνωστό ότι για $x \rightarrow \infty$, τότε $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ και $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε αυτές τις πληροφορίες στο κλάσμα $\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-18}$ και πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε ποσότητες στο κλάσμα που να περιέχουν τα $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x^2}$;
	15.2. Υπολογίζουν όρια από τη γραφική παράσταση συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες Γνώσεις ✓ Έννοια ορίου ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Υπολογισμός ορίων από γραφική παράσταση συνάρτησης	Παράδειγμα: Υπολογισμός ορίου συνάρτησης γραφικά Να βρείτε το όριο στις πιο κάτω περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (α) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  (β) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες. Παράδειγμα: Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια, αν υπάρχουν, αιτιολογώντας την απάντησή σας: (α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

		(γ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 	 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Τι πρέπει να προσέχω, όταν υπολογίζω όρια από γραφικές παραστάσεις; • Τι συμβαίνει, όταν μια συνάρτηση είναι ασυνεχής σε ένα σημείο x_0; Τι πρέπει να προσέξω στο όριο;
16. Συνέχεια συνάρτησης (A7.7) Ορίζουν και εφαρμόζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και εξετάζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα (α, β) ή $[\alpha, \beta]$. (Συνέχεια και ακολουθίες, αλγεβρικοί κανόνες συνεχών συναρτήσεων, συνέχεια της σύνθεσης δύο συνεχών συναρτήσεων, θεμελιώδη θεωρήματα	16.1 Ορίζουν και εφαρμόζουν τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια ορίου ✓ Υπολογισμός ορίου ✓ Τμηματικές συναρτήσεις ✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης ✓ Πεδίο ορισμού συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	Παράδειγμα: <i>Συνέχεια συναρτήσεων</i> • Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο x_0. (α) $f(x) = 2x^2, x_0 = 1$ (β) $g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 2 \\ 7 - x, & x \leq 2 \end{cases}$ (γ) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \\ 2 - x, & x \leq 1 \end{cases}$	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0 = 4$, χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

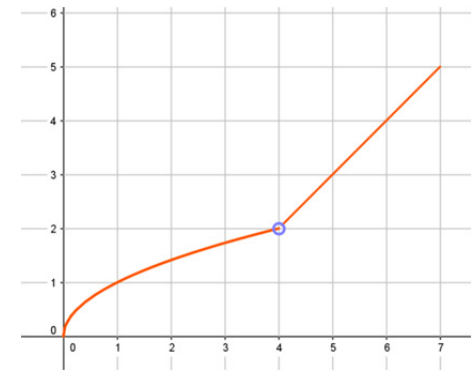
των συνεχών συναρτήσεων, θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, συνέχεια σε κλειστό διάστημα).

- Μία συνάρτηση f , που είναι ορισμένη σε διάστημα, είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, όταν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Μία συνάρτηση f , που είναι ορισμένη σε διάστημα, είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, όταν και μόνο όταν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$
- ✓ Η f είναι συνεχής στο Δ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in \Delta$.

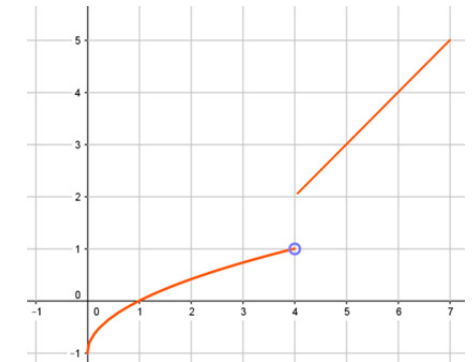
Σχόλιο:

- Για να εξετάσουμε τη συνέχεια σε σημείο x_0 , το x_0 εννοείται ότι είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f .
- Εξετάζοντας τη συνέχεια σε σημείο x_0 ενός διαστήματος, σημαίνει ότι το x_0 είναι οπωσδήποτε σημείο συσσώρευσης του Δ . Για αυτό και έχει νόημα ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- Δεν θα ασχοληθούμε με συνέχεια σε μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού (που όντως η συνάρτηση θεωρείται συνεχής σε αυτά), γιατί θα

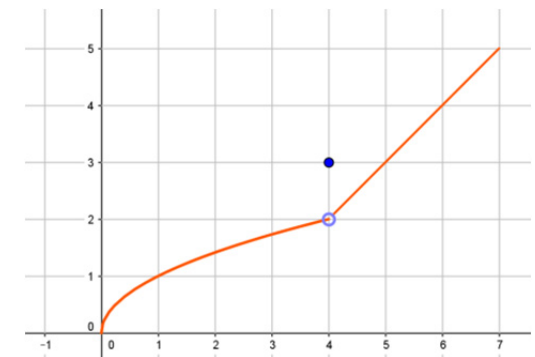
(α)



(β)



(γ)



	θεωρούμε ως πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων.		Απαντώ στην ερώτηση: Σε ποιες από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις έχει νόημα να εξετάσω κατά πόσο η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$;
	16.2 Αναφέρουν τη συνέχεια συναρτήσεων που είναι άμεση συνέπεια πράξεων μεταξύ συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Συνέχεια συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις ➤ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις $f \pm g, c \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}$ με $g(x_0) \neq 0, f , \sqrt[n]{f}$ με $f(x) \geq 0$ στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ➤ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0, Δηλαδή, ➤ $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(f(x_0))$ Οι βασικές συναρτήσεις (πολυωνυμικές, ρητές,	Παράδειγμα: Πράξεις με Συνεχείς συναρτήσεις Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\ln(\sin x))$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\pi}{2})$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων. Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την τιμή του a, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, & x < 3 \\ \frac{x - 3}{2x + a}, & x \geq 3 \end{cases}$ να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της. Απαντώ στις ερωτήσεις - Σε ποιο πιθανό σημείο ενδέχεται η συνάρτηση να είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$; - Τι πρέπει να εφαρμόσουμε ώστε να ισχύει η συνέχεια της συνάρτησης σε συγκεκριμένο σημείο του $\mathbb{R}$;

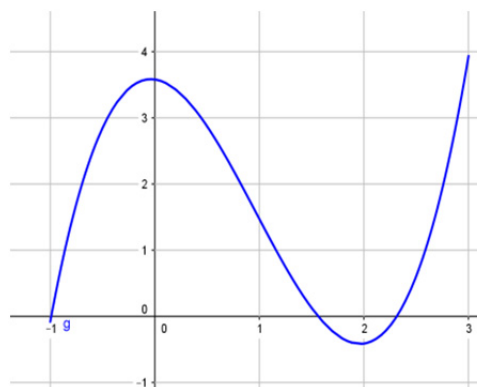
	τριγωνομετρικές και εκθετικές) είναι όλες συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.		
	16.3 Εφαρμόζουν το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Συνέχεια συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ➤ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \kappa$. Σχόλιο: • Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής είναι ότι η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ (είτε ανοικτό είτε κλειστό) μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. • Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστο σημεία $x_\varepsilon, x_\mu \in [a, \beta]$ στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και τη μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.	Παράδειγμα: <i>Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής</i> • Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = 5 - 3x$, που ορίζονται στο διάστημα $[-1, 4]$ (α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[-1, 4]$ των συναρτήσεων $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = 5 - 3x$. (β) Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει $\xi \in [-1, 4]$, ώστε να ισχύει $f(\xi) = 7,5$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 5]$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$ Απαντώ στις ερωτήσεις: • Μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής για την πιο πάνω συνάρτηση; • Αν θεωρήσουμε μ και M την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f, αντίστοιχα στο $[1, 5]$, πώς διατάσσονται οι αριθμοί $f(2), f(3)$ και $f(4)$; • Πώς μπορούμε να δείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ ανήκει στο διάστημα $[1, 5]$ και τι μπορεί να σημαίνει αυτό;

17.Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών
(Α7.19) Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν γεωμετρικά το θεώρημα των «ενδιάμεσων τιμών».

17.1 Ερμηνεύουν γεωμετρικά το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.
Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
Νέες Έννοιες:
✓ Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών
➤ Για τη συνάρτηση f που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, η ευθεία $y = \kappa$, τέμνει τουλάχιστον σε ένα σημείο τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$, όπου κ αριθμός μεταξύ των $f(a), f(\beta)$.

Παράδειγμα:
Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

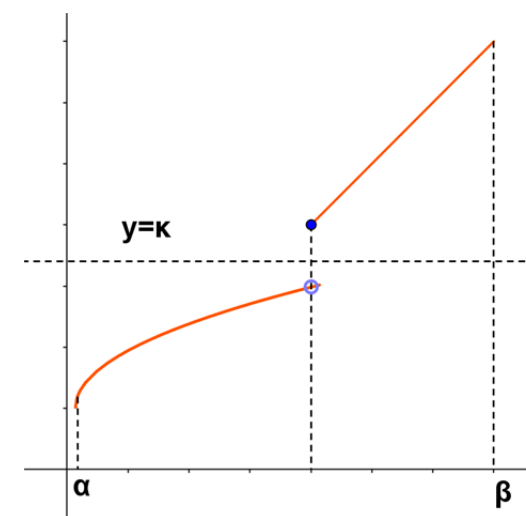
- Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να επιλέξετε ένα $\kappa \in [f(-1), f(3)]$ και να φέρετε την ευθεία $y = \kappa$.
- (α) Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [-1, 3]$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = \kappa$.
- (β) Να δείξετε στη γραφική παράσταση το πλήθος των x_i για τις διάφορες τιμές του κ ώστε να ισχύει $f(x_i) = \kappa$.



ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων

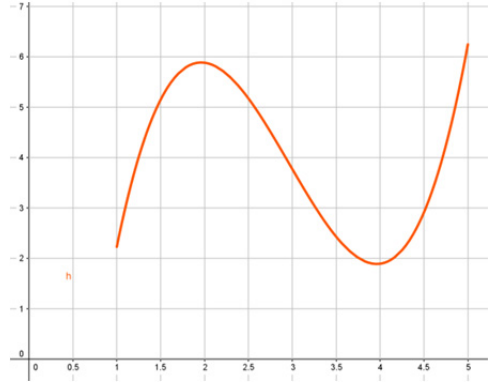
Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.

Παράδειγμα: Να αναφέρετε γιατί η συνέχεια της συνάρτησης στο $[a, \beta]$ είναι σημαντική προϋπόθεση για το συμπέρασμα του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, αξιοποιώντας το πιο κάτω σχήμα.

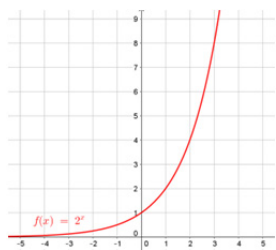
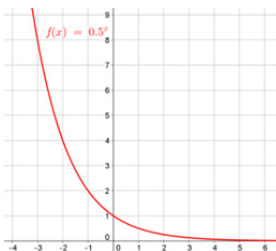


Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Γιατί η συνάρτηση με την πιο πάνω γραφική παράσταση δεν είναι συνεχής;
- Πώς η γραφική παράσταση μας βοηθά για να δούμε ότι δεν ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών;

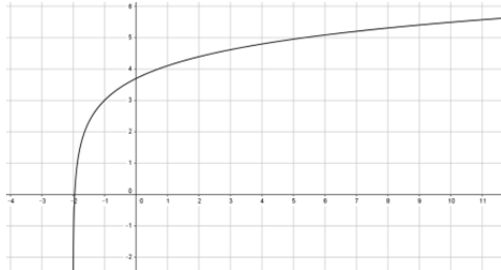
18.Θεώρημα Bolzano (A7.18) Αναφέρουν και εφαρμόζουν το θεώρημα Bolzano, για να επιλύουν προσεγγιστικά εξισώσεις.	18.1 Αναφέρουν και εφαρμόζουν το θεώρημα Bolzano. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Αλγεβρική και γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών Νέες Έννοιες: ✓ Θεώρημα Bolzano: Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Παρατηρήσεις: • Γραφικά το θεώρημα Bolzano ερμηνεύεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο. • Αλγεβρικά το θεώρημα Bolzano μας εξασφαλίζει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β), χωρίς να προσδιορίζει όμως την τιμή της.	Παράδειγμα: <i>Θεώρημα Bolzano</i> • Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[3,5]$ με $f(3) + f(5) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[3,5]$.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να ισχύσει το Θεώρημα Bolzano για μια συνάρτηση, η οποία έχει την πιο κάτω γραφική παράσταση.  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πόσες προϋποθέσεις έχει το Θεώρημα Bolzano; • Ποια δεν πληρείται;
	18.2 Εφαρμόζουν το θεώρημα Bolzano για να επιλύουν προσεγγιστικά εξισώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Θεώρημα Bolzano	Παράδειγμα: <i>Εφαρμογή θεωρήματος Bolzano</i> • Δίνεται η εξίσωση $2^{x+1} - 6 = 0$. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.	ΜΠ.7 Δομή των Μαθηματικών <i>Εφαρμόζω γενικούς κανόνες Μαθηματικών σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και τους χρησιμοποιώ στην προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων.</i>

	Νέες Έννοιες: ✓ Χρήση του θεωρήματος Bolzano για την προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων.	(β) Να βρείτε διαστήματα μικρότερου μήκους από το (1,2), ώστε να περιέχεται σε αυτά η ρίζα της εξίσωσης και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Να χρησιμοποιήσετε το (β) για να υπολογίσετε τη ρίζα της εξίσωσης με προσέγγιση δεκάτου.	Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 4 - 2x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0,1). Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς μπορούμε να παρατηρήσουμε γραφικά τη μοναδική λύση της εξίσωσης; (Ποιες δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πρέπει να σχεδιάσουμε σε άξονες;) • Γιατί η εξίσωση $e^x = 4 - 2x$ πρέπει να γραφεί στη μορφή $f(x) = 0$; • Ποιες προϋποθέσεις πρέπει να έχει η συνάρτηση f, ώστε να ισχύει το θεώρημα Bolzano; • Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της λύσης;
19.Εκθετική Συνάρτηση (A7.8) Ορίζουν και εφαρμόζουν την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, για κάθε ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$. Κατασκευάζουν γραμμικά και μη γραμμικά μοτίβα και αιτιολογούν τον κανόνα εκθετικών συναρτήσεων.	19.1 Ορίζουν και εφαρμόζουν την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, για κάθε ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια δύναμης με φυσικό, ακέραιο και ρητό εκθέτη ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με εκθέτη ρητό αριθμό ✓ Όριο συνάρτησης $f(x) = a^x, a > 1$ για $x \rightarrow \pm\infty$ ✓ Όριο συνάρτησης $f(x) = a^x, 0 < a < 1$ για $x \rightarrow \pm\infty$ Νέες Έννοιες: ✓ Εκθετική Συνάρτηση ✓ Η δύναμη με εκθέτη πραγματικό αριθμό	Παραδείγματα: <i>Εκθετική συνάρτηση</i> • Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda+3}{1-\lambda}\right)^x$ να είναι εκθετική. • Να σχεδιάσετε τη πιο πάνω συνάρτηση όταν $\lambda = 0$ και να αναφέρετε: (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της (β) πιθανά σημεία τομής με τους άξονες (γ) τη συμπεριφορά της συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Χρησιμοποιώ Μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ.), για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Οι ψυχολόγοι έχουν διαπιστώσει ότι αν κάποιος μελετήσει ένα βιβλίο των μαθηματικών, τότε μετά από t εβδομάδες το ποσοστό γνώσης που θα έχει απομείνει στη μνήμη του προσεγγίζεται με ακρίβεια από τη συνάρτηση: $f(t) = (100 - a)e^{-\lambda t} + a, \lambda > 0$ και $a \in [0,100]$ (α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. Πώς ερμηνεύεται το αποτέλεσμα (β) Το ποσοστό γνώσης που έχει απομείνει στη μνήμη δύο μαθητών Α και Β t εβδομάδες μετά τις εξετάσεις

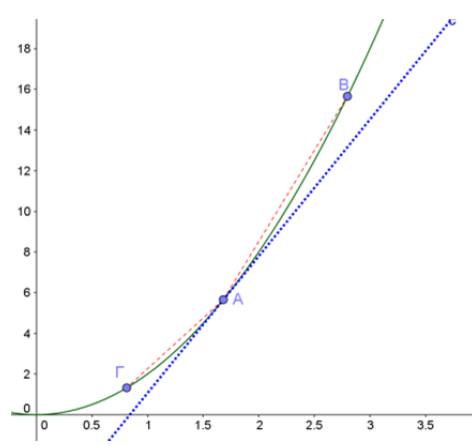
	ορίζεται $a^x = \lim_{x_n \rightarrow x} a^{x_n}$, όπου $\begin{cases} x \text{ άρρητος} \\ x_n \text{ ρητός} \end{cases}$. ✓ Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της μορφής $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση a. Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. ✓ Βασική εκθετική συνάρτηση η $f(x) = e^x$ με $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  		είναι: $f_A(t) = 85e^{-0.3t} + 15$ και $f_B(t) = 87e^{-0.3t} + 13$ Σε ποιού μαθητή τη μνήμη απομένουν περισσότερες γνώσεις; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Απαντώ στην ερώτηση: • Τι συμβαίνει στο ποσοστό της γνώσης όσο περνάνε οι εβδομάδες, σύμφωνα με το εκθετικό μοντέλο;
20.Λογαριθμική Συνάρτηση (A7.9) Ορίζουν και εφαρμόζουν τη λογαριθμική συνάρτηση στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών	20.1 Ορίζουν και εφαρμόζουν τη λογαριθμική συνάρτηση. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Εκθετική συνάρτησης ✓ Αντίστροφη συνάρτηση	Παραδείγματα: Λογαριθμική συνάρτηση • Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_3 x$ και να αναφέρετε το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της και τις τομές της με τους άξονες των συντεταγμένων. Στο	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου. Παράδειγμα: Πόσα ψηφία έχει ο ακέραιος αριθμός $A = 2^{10000}$; Αν πάρουμε ένα μικρότερο αριθμό, όπως για

με βάση ρητό $a > 1$ ή $0 < a < 1$.	Νέες Έννοιες: ✓ Λογαριθμική Συνάρτηση ✓ Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση a, όπου $a > 0, a \neq 1$, είναι ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $a^x = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_a \theta$. Δηλαδή: $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$, με $\theta > 0, 0 < a \neq 1$. ✓ Αν $0 < a \neq 1$ και στον θετικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε το $\log_a x$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$, η οποία λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση a. Παρατήρηση: • Οι συναρτήσεις $f(x) = \log_a x$ και $g(x) = a^x, 0 < a \neq 1$ έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Η καθεμία συνάρτηση αποτελεί αντίστροφη της άλλης.	ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε και τις συναρτήσεις $g(x) = \ln x$ και $h(x) = \log x$. • Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) + \ln(4 - x)$	παράδειγμα, το $2^{10} = 1024$, ο αριθμός αυτός έχει 4 ψηφία και περιέχεται μεταξύ των δυνάμεων 10^3 και 10^4, δηλαδή $10^3 < 2^{10} < 10^4$ και ο εκθέτης 4 αναφέρεται στο πλήθος των ψηφίων του 2^{10}. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Αν υποθέσουμε ότι το 2^{10000} έχει n ψηφία, τότε μεταξύ ποιων δυνάμεων του 10 περιέχεται το 2^{10000}; • Πώς μπορούμε μια ανίσωση της μορφής $10^{n-1} < X < 10^n$ να τη μετασχηματίσουμε στη μορφή $n - 1 < \Psi < n$; • Αν, για παράδειγμα, ισχύει $n - 1 < \Psi = 6931,5 < n$, τότε πόσο είναι το n;
21.Επίλυση εκθετικών και λογαριθμικών εξισώσεων (A7.22) Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.	21.1 Επιλύουν εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες λογαρίθμων Νέες Έννοιες: ✓ Χρήση των εκθετικών και λογαριθμικών ιδιοτήτων για επίλυση λογαριθμικών	Παραδείγματα: <i>Επίλυση εκθετικών – λογαριθμικών εξισώσεων</i> • Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις: (α) $3^{x^2-5x+11} = 243$. (β) $2^{x+1} = 5$ (γ) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x - 6 = 0$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής απόσβεσης. Δηλαδή η

	εξισώσεων	(δ) $\log_3(x + 2) = 2$ (ε) $\log(4x - 1) - 2\log 2 = \log(x^2 - 1)$ (στ) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ Να επιλύσετε και να ερμηνεύσετε την ανίσωση: $5000(1.05)^N > 8000, N \in \mathbb{N}$	ποσότητα $Q(t)$ του υλικού που απομένει μετά από t χρόνια, δίνεται από σχέση της μορφής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υλικού. Αν η ημιζωή του υλικού (δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να μείνει ακριβώς η μισή ποσότητα) είναι 3 χρόνια, να: (α) αποδείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$. (β) υπολογίσετε μετά από πόσα χρόνια θα απομείνουν 250 g, αν αρχικά υπήρχαν 8 Kg ραδιενεργού υλικού. Απαντώ στις ερωτήσεις: - Όταν η ημιζωή είναι 3 χρόνια, τότε με τι ισούται το $Q(3)$; - Με τι ισούται το e^c; - Ποια εξίσωση προκύπτει στο (β) και ποιος είναι ο άγνωστος;
22.Επίλυση προβλήματος με εκθετική-λογαριθμική συνάρτηση (A7.10) Χρησιμοποιούν την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση στη μελέτη προβλημάτων.	22.1 Χρησιμοποιούν την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση στη μελέτη και επίλυση προβλημάτων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Ιδιότητες λογαρίθμων ✓ Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση Νέες Έννοιες: ✓ Χρήση των εκθετικών και λογαριθμικών ιδιοτήτων για επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων	Παράδειγμα: <i>Επίλυση προβλήματος</i> Σε ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\theta(t)$ (πυρετός) του ασθενούς, t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου, δίνεται από τον τύπο: $\theta(t) = 36,1 + 3,9 \left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου. (α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο. (β) Να βρείτε τη θερμοκρασία του ασθενή σε μία ώρα μετά τη χορήγηση του φαρμάκου. (γ) Σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα επανέλθει στη	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Η ατμοσφαιρική πίεση σε gr/cm^2 δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 1035e^{-\frac{3x}{25}}$, όπου x είναι το υψόμετρο από την επιφάνεια της θάλασσας σε Km. (α) Ποια είναι η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας; (β) Ποια είναι η ατμοσφαιρική πίεση σε υψόμετρο 1000m; (γ) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση f είναι $1 - 1$ και να προσδιορίσετε την f^{-1}. (δ) Αν στην κορυφή ενός βουνού η

		φυσιολογική τιμή των $36,5^{\circ}\text{C}$; (δ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες, πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενή μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου;	ατμοσφαιρική πίεση είναι $828\text{gr}/\text{cm}^2$, να υπολογίσετε το ύψος του βουνού. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι η τιμή του x στην επιφάνεια της θάλασσας; • Τι είδους συνάρτηση προκύπτει ως αντίστροφη μιας εκθετικής συνάρτησης;
23.Λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια (A7.11) Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια.	23.1 Διερευνούν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα λογισμικά προγράμματα ή μαθηματικά εφαρμογίδια. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια Γραφική Παράστασης ✓ Χρήση Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας Νέες Έννοιες: ✓ Παρατήρηση και εικασίες για τον ρόλο που έχουν οι παράμετροι, όταν μεταβάλλονται	Παράδειγμα: <i>Χρήση λογισμικών</i> • Να κατασκευάσετε τους δρομείς a και β και να κάνετε τη γραφική παράσταση $f(x) = \ln(x + a) + \beta$. Να κάνετε τις παρατηρήσεις και να καταγράψετε το αποτέλεσμα, όταν: (α) μεταβάλλετε το δρομέα a (β) μεταβάλλετε το δρομέα β (γ) Για ποιες τιμές των a και β έχουμε τη πιο κάτω γραφική παράσταση: 	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Δίνεται το εφαρμογίδιο «EkthetikiLog_ggb», στο οποίο μεταβάλλεται ο δρομέας a, όπου a είναι πραγματικός αριθμός. Στο εφαρμογίδιο εμφανίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$. Ένα σημείο A βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της f και μπορεί να μετακινείται. Το σημείο A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $y = x$. Κατά την κίνηση του το A αφήνει «ίχνος», χαράσσοντας την καμπύλη μιας άλλης συνάρτησης g. Να μεταβάλλετε το δρομέα a και να αναφέρετε τις τομές με τον Oy άξονα και να περιγράψετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης, όταν το $x \rightarrow \pm\infty$. Να αναφέρετε ομοιότητες και διαφορές για: $a > 1$ $0 < a < 1$ $a = 1$ Να μετακινήσετε το σημείο A και να επαναλάβετε το (α) για τη συνάρτηση g.

			Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια σημαντική διαφορά παρουσιάζει η συνάρτηση a^x, όταν $a > 1$ και $0 < a < 1$; • Ποια είναι η σχέση των δύο συναρτήσεων οι οποίες είναι συμμετρικές στην $y = x$;
24.Παράγωγος συνάρτησης (A7.12) Ορίζουν την έννοια της παραγώγου και υπολογίζουν την παράγωγο αλγεβρικών συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ή $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ή $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.	24.1 Ορίζουν την έννοια της παραγώγου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια ορίου συνάρτησης ✓ Έννοια συνέχεια συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Παράγωγος Συνάρτησης ✓ Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. ✓ Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ. Σημείωση: • Την παράγωγο μπορούμε να τη δούμε και σε άλλες εκφράσεις όπως:	Παραδείγματα: <i>Ορισμός παραγώγου</i> • Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 1$. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f'(3)$ και $f'(a)$. • Να βρείτε την παράγωγο συνάρτησης $f'(x)$, όταν: (α) $f(x) = \sqrt{x}$ (β) $f(x) = \frac{1}{x}$	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: Να δώσετε τον ακριβή ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ. Να κάνετε αναφορά στον ορισμό σας όταν το διάστημα είναι κλειστό και να αναφέρετε τι σημαίνει παράγωγος στα άκρα του διαστήματος Δ. <i>Απαντώ τις ερωτήσεις</i> • Αν $x_0 \in \Delta$ και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, τι πρέπει να προσέξουμε κατά τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, όταν στο x_0 πιθανόν να αλλάζει και τύπο η συνάρτηση; • Ποια δύο όρια πρέπει πάντοτε να εξετάζουμε κατά πόσο συμπίπτουν, ώστε να αποφασίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη; • Αν $\Delta = [a, \beta]$ πώς ερμηνεύεται η παράγωγος στα άκρα a, β του διαστήματος Δ; • Τι σημαίνει, δηλαδή, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; Τι πρέπει να προσέξουμε αφού ορίζονται

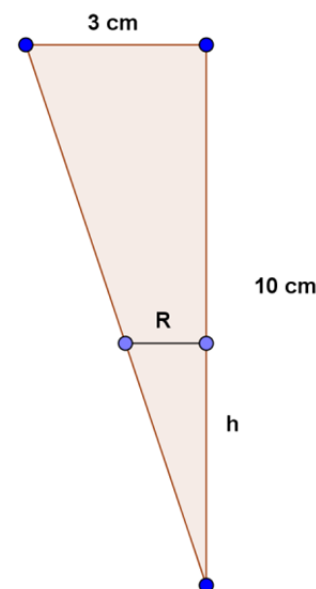
	$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$ ή ακόμη και $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$		μόνο στα «δεξιά» του α σημεία στο Δ; • Ποια είναι τα αντίστοιχα που πρέπει να προσέξουμε κατά τον υπολογισμό του ορίου στο δεξιά άκρο β του διαστήματος Δ;
25.Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (A7.13) Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = \alpha$ ως οριακή θέση χορδής AB όταν το σημείο B τείνει στο σημείο A.	25.1 Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = \alpha$. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Εφαπτομένη κύκλου ✓ Παραγωγίσιμη συνάρτηση Νέες Έννοιες: ✓ Εφαπτομένη καμπύλης ✓ Εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Σημείωση: • Το λ υπάρχει εφόσον υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια και είναι ίσα μεταξύ τους. $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$ • Αν το x_0 είναι άκρο διαστήματος που ορίζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε η εφαπτομένη της γραφικής	Παράδειγμα: Εφαπτομένη καμπύλης • Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Να βρείτε: (α) την $f'(1)$ (β) την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο για $x = 1$ (γ) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B(3, -4)$	ΜΠ.5. Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών, για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες. Παράδειγμα: Αν $A(x_0, f(x_0))$ και τα σημεία B, Γ είναι δύο «γειτονικά» σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, να εξηγήσετε με ποιο τρόπο οι κλίσεις των χορδών AB και $A\Gamma$ θα «βοηθήσουν» ώστε να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Αφού το σημείο A έχει συντεταγμένες $(x_0, f(x_0))$, τι συντεταγμένες θα δίναμε

	παράστασης στο A είναι η ευθεία που είναι φορέας της αντίστοιχης ημιευθείας. Γεωμετρικά η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο $x = a$ ορίζεται ως η οριακή θέση της χορδής AB όταν το σημείο B τείνει στο σημείο A.		στα σημεία B και Γ τα οποία βρίσκονται κοντά στο A; - Είναι ίσες οι κλίσεις των χορδών AB και $A\Gamma$; - Υπάρχει η δυνατότητα να μπορέσουμε με κατάλληλη επιλογή των σημείων B και Γ πάνω στην καμπύλη και εκατέρωθεν του A να κάνουμε τις κλίσεις τους ($\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$) ίσες; - Αν $x_B = x_0 + h$ τι συμβαίνει με το h όταν $B \rightarrow A$. Τι μπορούμε να υποθέσουμε για το x_Γ; - Πότε οι δύο κλίσεις μπορούν να εξισωθούν; - Τι μπορούμε να υποθέσουμε, όταν οι δύο ημιευθείες AB και $A\Gamma$ έχουν την ίδια κλίση;
26.Μη παραγωγίσιμη συνάρτηση (A7.14) Διακρίνουν την παραγωγισιμότητα συνάρτησης σε ένα σημείο της και προσδιορίζουν πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη	26.1 Προσδιορίζουν πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια ορίου ✓ Μη ύπαρξη ορίου Νέες Έννοιες: ✓ Μη παραγωγίσιμη συνάρτηση: Μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, όταν το όριο του πηλίκου διαφορών είναι $\pm\infty$, ή όταν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Παράδειγμα: <i>Μη παραγωγίσιμη συνάρτηση</i> Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Πώς ερμηνεύεται αυτό γραφικά;	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: (α) Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x x - 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$; (β) Πώς μπορούμε να στηρίξουμε τον ισχυρισμό μας γραφικά; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> - Γιατί η συνάρτηση f είναι τμηματική; - Τι σημαίνει αυτό για τον τύπο της συνάρτησης εκατέρωθεν του $x_0 = 1$; - Ποια πλευρικά όρια πρέπει να

			εξετάσουμε; • Για να μην είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση στο $x_0 = 1$, τι πρέπει να συμβαίνει με τα δύο πλευρικά όρια; • Τι θα παρατηρήσουμε στη γραφική παράσταση της f στην περιοχή του $x_0 = 1$;
27.Συνέχεια και παραγωγισιμότητα (A7.14) Διακρίνουν τη συνέχεια συνάρτησης σε ένα σημείο της.	27.1 Συνδέουν τις έννοιες της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις Νέες Έννοιες: ✓ Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα ✓ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0. <i>Σημείωση:</i> • Η παραγωγισιμότητα θεωρείται ως «ισχυρότερη» ιδιότητα από τη συνέχεια. • Μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής, αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη.	Παραδείγματα: <i>Συνέχεια και παραγωγισιμότητα</i> • Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0. Να εξετάσετε τον αντίστροφο ισχυρισμό και να δώσετε κατάλληλα παραδείγματα.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: (α) Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και να ελέγξετε την παραγωγισιμότητα της στο $x_0 = 0$. (β) Ποια είναι η γραφική ερμηνεία των δύο εννοιών; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια όρια εξετάζουμε στη συνέχεια και τι απαιτούμε για την αντίστοιχη αριθμητική τιμή; • Ποια όρια εξετάζουμε στην παράγωγο; • Πώς είναι η γραφική παράσταση της f στην περιοχή του x_0; • Πώς είναι οι κλίσεις της γραφικής παράστασης σε μια περιοχή του $x_0 = 0$;
28.Παράγωγος συναρτήσεων που ορίζονται παραμετρικά ή σε πεπλεγμένη μορφή (A7.16)	28.1 Υπολογίζουν την παράγωγο συναρτήσεων που ορίζονται παραμετρικά Προαπαιτούμενες Γνώσεις:	Παραδείγματα: <i>Παράγωγος συνάρτησης που ορίζεται παραμετρικά</i> • Αν $x = 2t + 3, y = t^2 - 1$ να:	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων <i>Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i>

Υπολογίζουν την παράγωγο συναρτήσεων που ορίζονται παραμετρικά ή σε πεπλεγμένη μορφή.	✓ Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Παράγωγος συναρτήσεων που ορίζεται παραμετρικά ✓ Αν μία συνάρτηση δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = f(t), y = g(t), t \in \Delta$ και οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ με τον κανόνα της αλυσίδας είναι: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$.	(α) υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ στο $t = 6$ (β) Να βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσει του t και συναρτήσει του x	Παράδειγμα: Ένα σώμα κινείται σε ένα οριζόντιο άξονα και η θέση του καταγράφεται από το σημείο P όπου σε κάθε χρονική στιγμή t ($t \geq 0$) η θέση του σημείου P είναι $x = t + \ln(t + 1)$. Να δώσετε ένα τύπο που να υπολογίζει τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή t. Για τη χρονική στιγμή $t = 3$, να υπολογίσετε: (α) τη θέση του κινητού (β) τη ταχύτητά του (γ) την επιτάχυνσή του <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος, αν η θέση του δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης $x = f(t), t \geq 0$; • Πώς ορίζεται η επιτάχυνση του κινητού;
	28.2 Υπολογίζουν την παράγωγο συναρτήσεων που ορίζεται σε πεπλεγμένη μορφή. Προαπαιτούμενες Γνώσεις: ✓ Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης Νέες Έννοιες: ✓ Παράγωγος συναρτήσεων που ορίζεται σε πεπλεγμένη μορφή ✓ Αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $F(x, y) = 0$, τότε η συνάρτηση είναι σε πεπλεγμένη μορφή. ✓ Αντίστροφα, σε μία εξίσωση $F(x, y) = 0$ με τις	Παραδείγματα: <i>Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης</i> • Να βρείτε την $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = f(x)$, που ορίζεται από την εξίσωση $x^3 + y^3 - 3xy = 3$. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της (2,1).	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάσω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παράδειγμα: Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης οι οποίες είναι κάθετες στην $y = x + 10$. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πότε δύο ευθείες είναι κάθετες; • Πώς ορίζεται η κλίση της καμπύλης σε ένα τυχαίο σημείο της $P(x, y)$; • Με τι θα πρέπει να είναι ίση η κλίση της καμπύλης, ώστε οι εφαπτόμενες της να

	μεταβλητές x, y, να παίρνουν τιμές σε κατάλληλα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ώστε σε κάθε x να αντιστοιχεί μόνο μία τιμή του y, τότε η το y ορίζει πεπλεγμένη συνάρτηση ως προς x. <i>Παρατήρηση:</i> • Η καμπύλη που αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση $F(x, y) = 0$ ενδεχομένως να μην είναι η γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης $y = f(x)$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - x^2}$ επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$, αλλά η εξίσωση παριστάνει καμπύλη η οποία δεν είναι η ίδια η συνάρτηση. • Για να παραγωγίσουμε μια πεπλεγμένη συνάρτηση, παραγωγίζουμε ως προς x τον κάθε όρο ξεχωριστά.		είναι κάθετες στην $y = x + 10$;
29. Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής (Α7.17) Εφαρμόζουν την έννοια της παραγώγου, για να προσδιορίζουν την κλίση και την εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε σημείο της και επιλύουν	29.1 Χρησιμοποιούν την παράγωγο ως ρυθμό μεταβολής. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός Παραγώγου ✓ Έννοια Μέσης και στιγμιαίας Ταχύτητας ✓ Έννοια Επιτάχυνσης Νέες Έννοιες: ✓ Ρυθμός Μεταβολής	Παραδείγματα: <i>Ρυθμός μεταβολής</i> • Υλικό σημείο κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα Ox και η τετμημένη του δίνεται από τη σχέση $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t + 1$. (α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητά στο διάστημα $[2, 5]$. (β) Να υπολογίσετε την στιγμιαία	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Χρησιμοποιώ Μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ.), για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Ένα ποτήρι έχει κωνικό σχήμα με ακτίνα 3 cm και ύψος 10 cm. Αν στο ποτήρι ρίχνουμε νερό με ρυθμό $2\text{ cm}^3/\text{sec}$, να υπολογίσετε πόσο γρήγορα ανεβαίνει η στάθμη του νερού

προβλήματα ρυθμού μεταβολής.	✓ Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης $y = f(x), x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, ορίζεται ως το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. ✓ Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής στο σημείο $x = x_0$ μιας συνάρτησης $y = f(x), x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, ορίζεται ως το όριο $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. <i>Παρατήρηση:</i> ✓ Όταν το x παριστάνει "χρόνο" και το y παριστάνει μετατόπιση, τότε το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ παριστάνει τη μέση ταχύτητα, ενώ το όριο $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ παριστάνει τη στιγμιαία ταχύτητα όταν $x = x_0$. ✓ Αν με V παριστάνουμε τον όγκο ενός σχήματος το οποίο έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλεται, τότε με $\frac{dV}{dt}$ παριστάνουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται αυτός ο όγκος.	ταχύτητά του ως προς την αρχή O, τη χρονική στιγμή $t = 3$.	στο ποτήρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία το ύψος του νερού είναι 5 cm. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις</i> • Ποιος είναι ο τύπος που δίνει τον όγκο κώνους; • Πώς συμβολίζεται ο ρυθμός μεταβολής που είναι σταθερός και ίσος με $2\text{ cm}^3/\text{sec}$; • Ποια είναι η σχέση που συνδέει το R με το h, αν την τυχαία χρονική στιγμή t που εισέρχεται το νερό στο δοχείο η ακτίνα είναι R και το ύψος h; • Γιατί είναι χρήσιμος ο κανόνας της αλυσίδας $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$; • Πώς συμβολίζεται ο ρυθμός μεταβολής του ύψους h; 
-------------------------------------	---	--	---

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΡΙΘΜΟΙ)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής (Αρ.6.1**) Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, για να αποδεικνύουν σχέσεις μεταξύ αριθμών.	1.1 Αποδεικνύουν βασικές σχέσεις ισοτήτων και ανισοτήτων με φυσικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια της συνάρτησης ✓ Έννοια τις ακολουθίας ως ειδική περίπτωση συνάρτησης ✓ Βασικά στοιχεία από τις ακολουθίες όπως όρος, δείκτης γενικός όρος, αναδρομικές σχέσεις ✓ Διάφοροι τρόποι αναπαράστασης μίας ακολουθίας	Παραδείγματα: <i>Μαθηματική Επαγωγή</i> • Ποιο είναι το σύνολο αναφοράς ενός προτασιακού τύπου, όταν εφαρμόζουμε την Τέλεια Επαγωγή; • Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $(α) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ $(β) \quad 0 \left(3 + \sqrt{5}\right)^n + \left(3 - \sqrt{5}\right)^n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 2$ • Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$ ισχύει: $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1$	

ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων
Επεξηγώ τη σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.

Παράδειγμα: Ένα παιδί διατυπώνει τον ισχυρισμό ότι. «Για κάθε φυσικό αριθμό n ο αριθμός $n^2 - n + 41$ είναι πρώτος» και παρουσιάζει τον πιο κάτω πίνακα, έτσι ώστε να δικαιολογήσει τον ισχυρισμό του.

n	$n^2 - n + 41$	Πρώτος ή Σύνθετος
1	41	Πρώτος
2	43	Πρώτος
3	47	Πρώτος
4	53	Πρώτος
5	61	Πρώτος
6	71	Πρώτος
7	83	Πρώτος
8	97	Πρώτος
...	...	...

** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Αρ.6.1) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

	✓ Πρόταση και Προτασιακός τύπος Νέες Έννοιες ✓ Η μέθοδος της τέλειας επαγωγής είναι ένας προτασιακός τύπος $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ που αναφέρεται στο σύνολο των Φυσικών Αριθμών τέτοιος ώστε το $P(1)$ να είναι αληθής πρόταση και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ να είναι επίσης αληθής, τότε ο προτασιακός τύπος $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. <i>Παρατήρηση:</i> Συμβαίνει πολλές φορές ένας προτασιακός τύπος $P(n)$ να έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, δηλαδή ένα σύνολο της μορφής $A = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$. Η μέθοδος της τέλειας επαγωγής μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο τρόπο με τη διαφορά ότι στη θέση του «$P(1)$ αληθής», θα έχουμε το «$P(n_0)$ αληθής».		Να αποφασίσετε για την ορθότητα ή μη του ισχυρισμού του. Αν διαφωνείτε να επεξηγήσετε γιατί ένας τέτοιος ισχυρισμός ο οποίος φαίνεται να είναι «λογικά» βάσιμος δεν είναι δυνατό να ευσταθεί. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς είμαστε σίγουροι ότι ένας τέτοιος ισχυρισμός πιθανόν να μην ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς; • Ποιο αντιπαράδειγμα μπορώ να δώσω, για να τεκμηριώσω ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος; ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, για να αποδείξω προτάσεις που έχουν σύνολο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών.</i> Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Η πρόταση μπορεί να ελεγχθεί ότι είναι ορθή για $n = 1, 2, 3, \dots$. Γιατί δεν είναι αρκετός μόνο ο έλεγχος για ορισμένες τιμές φυσικών αριθμών; • Ποια είναι η μέθοδος η οποία μας εξασφαλίζει την ορθότητα μιας πρότασης για όλους του φυσικούς αριθμούς;
--	---	--	--

2. Λογική Πρόταση (Αρ.7.6) Ορίζουν την έννοια της λογικής πρότασης, εφαρμόζουν την αρχή του Αριστοτέλη και διακρίνουν απλές και σύνθετες λογικές προτάσεις.	2.1 Ορίζουν την έννοια της λογικής πρότασης και εφαρμόζουν την αρχή του Αριστοτέλη Νέες έννοιες ✓ Πρόταση στα Μαθηματικά και γενικά στη Λογική εννοούμε μία έκφραση με πλήρες νόημα, η οποία επιδέχεται ένα ακριβώς από τους χαρακτηρισμούς «αληθής» ή «ψευδής».	Παραδείγματα: <i>Λογική πρόταση</i> • Να αναφέρετε αν οι πιο κάτω προτάσεις είναι λογικές προτάσεις και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές αληθείας τους: (α) Ο αριθμός 15 είναι πρώτος. (β) Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. (γ) Ο αριθμός 6 είναι πολύ αγαπητός. (δ) Ο αριθμός α είναι άρτιος. (ε) Η Κύπρος είναι νησί. (στ) Μάλλον δεν θα βρέξει σήμερα. (ζ) Το παραλληλόγραμμο δεν έχει άξονες συμμετρίας.	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παράδειγμα: (α) Να ορίσετε την έννοια της λογικής πρότασης και να τη διακρίνετε πότε είναι απλή και πότε σύνθετη. (β) Να δώσετε ένα παράδειγμα απλής πρότασης και να εισάγετε στην πρότασή σας κατάλληλο σύνδεσμο, ώστε να μετατραπεί σε σύνθετη πρόταση. (γ) Να δώσετε ως παράδειγμα μία πρόταση, η οποία να μην είναι λογική. (δ) Να δώσετε ένα παράδειγμα σύνθετης πρότασης, διακρίνοντας τις απλές προτάσεις οι οποίες την σχηματίζουν και το σύνδεσμο ο οποίος συνδέει τις απλές προτάσεις. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιο πρέπει να είναι το βασικό στοιχείο μιας πρότασης (με πλήρες νόημα), για να θεωρηθεί λογική πρόταση; • Ποιο αντιπαράδειγμα μπορούμε να δώσουμε ώστε να μην χαρακτηρίζεται μια πρόταση ως λογική; • Όταν έχουμε δύο απλές προτάσεις, πώς μπορούμε να τις συνδέσουμε ώστε να σχηματίσουμε μία σύνθετη πρόταση;
	2.2 Διακρίνουν απλές και σύνθετες λογικές προτάσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λογική πρόταση ✓ Τιμή αληθείας λογικής πρότασης Νέες Έννοιες ✓ Μια λογική πρόταση ονομάζεται απλή αν δεν περιέχει συνδέσμους της μορφής «και», «ή», «αν» κτλ. Η απλή πρόταση θεωρείται ως «πρωταρχική έννοια». ✓ Μια λογική πρόταση ονομάζεται σύνθετη, όταν δύο ή περισσότερες απλές προτάσεις συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο λογικό σύνδεσμο, όπως το «και», «ή», «αν», «τότε» κτλ.	Παραδείγματα: <i>Απλές – Σύνθετες προτάσεις</i> • Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι απλές και ποιες σύνθετες; Να βρείτε τις τιμές αληθείας τους. (α) Ο αριθμός 17 δεν είναι πρώτος. (β) Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, τότε είναι ρόμβος. (γ) Αν οι αριθμοί a και β είναι άρρητοι, τότε και ο $a + \beta$ είναι άρρητος.	

3. Πράξεις λογικών προτάσεων (Αρ.7.7) Αναφέρουν και εφαρμόζουν τις πράξεις λογικών προτάσεων (άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, αποκλειστική διάζευξη), τη συνεπαγωγή και τη ισοδυναμία, σχηματίζουν τους αντίστοιχους πίνακες αληθείας και μελετούν τις λογικά ισοδύναμες προτάσεις.	3.1 Αναφέρουν και εφαρμόζουν τις πράξεις λογικών προτάσεων όπως σύζευξη, διάζευξη, άρνηση, συνεπαγωγή και ισοδυναμία, σχηματίζουν τους αντίστοιχους πίνακες αληθείας και μελετούν τις λογικά ισοδύναμες προτάσεις. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λογική πρόταση ✓ Τιμή αληθείας λογικής πρότασης Νέες Έννοιες ✓ Σύζευξη δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε την πρόταση «p και q» και τη συμβολίζουμε με $p \wedge q$ ✓ Διάζευξη δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε την πρόταση «p ή q» και τη συμβολίζουμε με $p \vee q$. ✓ Αποκλειστική Διάζευξη δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε την πρόταση «ή p ή q», δηλαδή «ή μόνο p ή μόνο q» και τη συμβολίζουμε με $p \underline{\vee} q$. ✓ Άρνηση μιας πρότασης p ονομάζουμε την πρόταση «όχι p» και τη συμβολίζουμε με $\bar{p}$. ✓ Συνεπαγωγή δύο προτάσεων p, q	Παράδειγμα: <i>Σύζευξη δύο προτάσεων p, q</i> • Δίνονται οι προτάσεις: p: «Το 18 είναι άρτιος» q: «Το 18 είναι διαιρέτης του 36» r: «Το 18 είναι πολλαπλάσιο του 4» Να διατυπώσετε τις προτάσεις $p \wedge q, p \wedge r$ και $q \wedge r$ και να εξετάσετε κατά πόσο είναι αληθείς ή ψευδείς, αιτιολογώντας την απάντησή σας. Παράδειγμα: <i>Διάζευξη δύο προτάσεων p, q</i> • Δίνεται η πρόταση: «Ο ΚΟΤ ζητά να προσλάβει ξεναγούς που μιλούν είτε Γαλλικά είτε Γερμανικά» Αν ο ΚΟΤ έχει προσλάβει στη θέση αυτή ένα άτομο, να εξηγήσετε ποιες από τις πιο πάνω γλώσσες ενδεχομένως να μιλά. Παράδειγμα: <i>Αποκλειστική Διάζευξη</i> • «Θα πάω στο ποδόσφαιρο ή θα μείνω στο σπίτι να διαβάσω» Ποια είναι η ερμηνεία του πιο πάνω διαζευκτικού ή; Έχει την ίδια σημασία με την εγκλειστική διάζευξη; Παράδειγμα: <i>Άρνηση πρότασης</i> • Να δώσετε την άρνηση των πιο κάτω προτάσεων: p: «Το 12 είναι τέλειο τετράγωνο» q: «Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο» r: «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°»	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό <i>Να βλέπουν επαναλαμβανόμενους συλλογισμούς και να ψάχνουν γενικεύσεις και σύντομες λύσεις. Να παρατηρούν τη δομή των προτάσεων και να είναι σε θέση να τις διατυπώνουν με εναλλακτικό τρόπο.</i> Παραδείγματα: Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις με εναλλακτικό τρόπο, έτσι ώστε να χρησιμοποιήσετε σύζευξη ή διάζευξη για να τις διατυπώσετε: 1. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a^2 + b^2 = 0$ 2. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a^2 + b^2 \neq 0$ 3. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = 0$ <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Η καθεμία από τις προτάσεις μας οδηγεί στο να χρησιμοποιήσουμε τους δύο συνδέσμους «ή, και». Ποιος σύνδεσμος είναι κατάλληλος σε κάθε περίπτωση και ποιος σύνδεσμος οδηγεί σε σύζευξη ή διάζευξη;
--	---	--	---

	ονομάζουμε την πρόταση «αν p τότε q» ή διαφορετικά «p συνεπάγεται q» και τη συμβολίζουμε με $(p \Rightarrow q)$. <i>Παρατηρήσεις:</i> - Άλλες διατυπώσεις για την συνεπαγωγή $(p \Rightarrow q)$ είναι: ➤ «p είναι ικανή συνθήκη για την q» ➤ «q είναι αναγκαία συνθήκη για την p» ➤ «για να ισχύει η q αρκεί η p» - Η πρόταση p λέγεται υπόθεση και η πρόταση q συμπέρασμα. - Η συνεπαγωγή $(q \Rightarrow p)$ λέγεται αντίστροφη της συνεπαγωγής $(p \Rightarrow q)$. - Η συνεπαγωγή $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$, λέγεται αντίθετη της συνεπαγωγής $(p \Rightarrow q)$. - Η συνεπαγωγή $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ λέγεται αντιθετοαντίστροφη της συνεπαγωγής $(p \Rightarrow q)$ και έχει την ίδια τιμή αληθείας με την $(p \Rightarrow q)$. ✓ Ισοδυναμία δύο προτάσεων p, q ονομάζουμε την πρόταση «p συνεπάγεται q και αντίστροφα», ή «p τότε και μόνο τότε q» και τη	Παραδείγματα: <i>Συνεπαγωγή δύο προτάσεων p, q</i> • Να αναφέρετε ποιο είναι το συμπέρασμα και ποια η υπόθεση στη συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$. • Να αναφέρετε ποιες από τις πιο κάτω συνεπαγωγές είναι αληθείς ή ψευδείς, αιτιολογώντας την απάντησή σας. $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3}$ άρρητος $5 > 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{9}{10} \in \mathbb{Q}$ $\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ Παραδείγματα: <i>Αντίστροφη και αντίθετη συνεπαγωγή</i> • Να αναφέρετε (με συμβολικό χαρακτήρα) την αντίστροφη και την αντίθετη συνεπαγωγή της συνεπαγωγής $P \Rightarrow Q$. • Θεωρούμε την συνεπαγωγή: «Αν ένας αριθμός λήγει σε 0 ή 5, τότε είναι διαιρετός δια 5». Να διατυπώσετε την αντίστροφη και την αντίθετη συνεπαγωγή της και να ελέγξετε κατά πόσο είναι αληθείς ή ψευδείς. Παράδειγμα: <i>Αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή</i> • Δίνεται η συνεπαγωγή: «Αν δύο ευθείες ενός επιπέδου τέμνονται, τότε οι ευθείες αυτές δεν είναι παράλληλες». Να διατυπώσετε την αντιθετοαντίστροφη της πιο πάνω συνεπαγωγής και να ελέγξετε την τιμή αληθείας των δύο συνεπαγωγών.	ΜΠ.2. Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Κατανοούν σχέσεις και ιδιότητες μεταξύ διαφορετικών πράξεων με λογικές προτάσεις. Αναπαριστούν συμβολικά μια πρόταση (την αποπλαισιώνουν) και αντίστροφα (την πλαισιώνουν), κατανοώντας το νόημα των συμβόλων στις πράξεις</i> Παράδειγμα: Δίνονται οι προτάσεις: p: «Ο Ανδρέας είναι Μαθηματικός» q: «Ο Βασίλης είναι Φυσικός» r: $x, y \in \mathbb{R}, (x - 2)(y + 3) = 0$ Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας: $p \wedge q$ $p \vee q$ - Την άρνηση της σύζευξης των προτάσεων p, q. - Την άρνηση της διάζευξης των προτάσεων p, q. - Την πρόταση r <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Η άρνηση μιας σύζευξης είναι σύζευξη; Μήπως ο πίνακας αληθείας μπορεί να με βοηθήσει; • Η άρνηση μιας διάζευξης είναι διάζευξη; Μήπως ο πίνακας αληθείας μπορεί να με βοηθήσει;
--	--	--	--

	συμβολίζουμε με $(p \Leftrightarrow q)$. <i>Παρατηρήσεις:</i> - Ελέγχουμε ότι δύο προτάσεις p, q είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, όταν η σύζευξη $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ είναι αληθής. - Καθεμιά από τις προτάσεις p, q είναι ικανή συνθήκη για την άλλη και επίσης καθεμιά είναι αναγκαία συνθήκη για την άλλη. - Το σύμβολο της ισοδυναμίας μπορεί επίσης να ερμηνευθεί λεκτικά και με τις εκφράσεις «αν και μόνο αν» ή «πρέπει και αρκεί».	Παράδειγμα: <i>Ισοδυναμία δύο προτάσεων p, q</i> Δίνονται δύο προτάσεις: p: «Το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο» q: «Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται» Να εκφράσετε λεκτικά τις ισοδυναμίες $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$, καθώς και την ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$.	
4. Προτασιακός τύπος (Αρ.7.8)Ορίζουν την έννοια του προτασιακού τύπου και εκτελούν πράξεις με προτασιακούς τύπους.	4.1 Ορίζουν την έννοια του προτασιακού τύπου, να τη διακρίνουν από την λογική πρόταση, να βρίσκουν το σύνολο τιμών αληθείας και εκτελούν πράξεις με προτασιακούς τύπους. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λογική πρόταση ✓ Πράξεις λογικών προτάσεων Νέες Έννοιες ✓ Προτασιακός τύπος ή ανοικτή πρόταση είναι	Παραδείγματα: <i>Προτασιακός τύπος</i> - Να εξηγήσετε τη διαφορά μεταξύ λογικής πρότασης και προτασιακού τύπου. - Ποια έκφραση από τις πιο κάτω είναι προτασιακός τύπος και γιατί; (α) p: «Το 6 είναι περιττός αριθμός». (β) $p(x)$: «Ο x είναι άρτιος αριθμός», με σύνολο αναφοράς $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Οργανώνω τις πράξεις μεταξύ λογικών προτάσεων, συνθέτω απλές λογικές προτάσεις και σχηματίζω σύνθετες προτάσεις, ώστε να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.</i> Παραδείγματα: (α) Δίνεται ο προτασιακός τύπος $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x + 12$. Να αναφέρετε κατά πόσο ο προτασιακός τύπος είναι σύζευξη ή διάζευξη η οποία προέρχεται από την ανίσωση $x^2 > x + 12$ και την εξίσωση $x^2 = x + 12$.

	κάθε έκφραση η οποία περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές και γίνεται λογική πρόταση, όταν η μεταβλητή (ή οι μεταβλητές) αντικατασταθεί με ένα στοιχείο από το σύνολο αναφοράς.		<i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Ποιος σύνδεσμος ταιριάζει στο «διπλό» σύμβολο $\geq$; Ποια λογική πράξη αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο σύνδεσμο; (β) Όταν έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους και με δεδομένο ότι η κάθε εξίσωση είναι ένας προτασιακός τύπος, με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$, να αναφέρετε το είδος της πράξης (διάζευξη ή σύζευξη) για το σύστημα το δύο εξισώσεων. <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Το γεγονός ότι σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων αναζητούμε τις κοινές λύσεις τους, σε ποιο είδος πρότασης μας οδηγεί; Σύζευξη ή διάζευξη και γιατί;
5. Ποσοδείκτες – Μέθοδοι απόδειξης (Αρ.7.9) Ορίζουν λογικούς τύπους, τύπους με μεταβλητές, και τον υπαρξιακό και καθολικό ποσοδείκτη. Εφαρμόζουν τις βασικές μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά (Ευθεία απόδειξη με συνεπαγωγή, αντιθετοαντιστροφή και απαγωγή σε άτοπο).	5.1 Ορίζουν λογικούς τύπους, τύπους με μεταβλητές, και χρησιμοποιούν κατάλληλα τον υπαρξιακό και καθολικό ποσοδείκτη. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λογική πρόταση ✓ Πράξεις λογικών προτάσεων ✓ Έννοια ταυτότητας ✓ Προτασιακός τύπος Νέες Έννοιες ✓ Εκφράσεις οι οποίες προτάσσονται σε ένα προτασιακό τύπο, όπως το «υπάρχει» (τουλάχιστον ένα) και	Παραδείγματα: <i>Ποσοδείκτες</i> • Να χρησιμοποιήσετε τον κατάλληλο ποσοδείκτη ($\forall, \exists, \nexists, \exists!$) μπροστά από τους πιο κάτω προτασιακούς τύπους: (α) $\dots x \in \mathbb{R}: 2x + 1 = 0$ (β) $\dots y \in \mathbb{R}: (y - 2)^2 \geq 0$ (γ) $\dots a \in \mathbb{R}: a^2 + 3^2 = 5^2$ (δ) $\dots x, y \in \mathbb{R}: x + 2y = 3$ (ε) $\dots x \in \mathbb{R}: \sqrt{x} = -4$	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</i> Παραδείγματα: (α) Να ορίσετε τον καθολικό και τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και να δώσετε τα αντίστοιχα σύμβολά τους. Να αιτιολογήσετε την ονομασία του κάθε ποσοδείκτη και να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα, όπου χρησιμοποιούμε καθολικό ποσοδείκτη και ένα παράδειγμα που χρησιμοποιούμε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη. <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Να συσχετίσετε την ετυμολογία της λέξης «καθολικός» ποσοδείκτης και «υπαρξιακός» ποσοδείκτης. (β) Κάθε προτασιακός τύπος έχει ένα

	«για κάθε» (ή για όλα), λέγονται ποσοδείκτες. ✓ Ο ποσοδείκτης «υπάρχει» (τουλάχιστον ένα) συμβολίζεται με το σύμβολο $\exists$ και λέγεται υπαρξιακός ποσοδείκτης. ✓ Ο ποσοδείκτης «για κάθε» (ή για όλα) συμβολίζεται με το σύμβολο $\forall$ και ονομάζεται καθολικός ποσοδείκτης. <i>Παρατήρηση:</i> ✓ Μπορούμε με βάση αυτούς τους δύο βασικούς ποσοδείκτες να σχηματίσουμε και άλλους σχετικούς όπως: ➤ «Δεν υπάρχει» και συμβολίζουμε $\nexists$ ➤ «Υπάρχει ακριβώς ένα» και συμβολίζουμε με $\exists!$		σύνολο αναφοράς Ω και ένα σύνολο αληθείας A. i. Να αναφέρετε το σύνολο Ω και το σύνολο A. ii. Να εξετάσετε στις πιο κάτω περιπτώσεις κατά πόσο σε ένα προτασιακό τύπο είναι δυνατόν να ισχύει $\Omega = A$ ή $\Omega \neq A$. iii. Σε κάθε περίπτωση να αναφέρετε τον κατάλληλο ποσοδείκτη που αντιστοιχεί στον προτασιακό τύπο και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (α) $x \in \mathbb{R}, 0 \cdot x = 0$ (β) $x \in \mathbb{Z}, x^3 = 100x$ (γ) $x \in \mathbb{N}, x < 0$ (δ) $x, y \in \mathbb{Z} \ x + 3y = 10$ <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Ποιοι κατάλληλοι ποσοδείκτες χρησιμοποιούνται, όταν αναφερόμαστε σε εκφράσεις όπως: «ισχύει για όλα τα $x \in \Omega$», ή «ισχύει τουλάχιστον για ένα $x \in \Omega$»;
5.2 Εφαρμόζουν τις βασικές μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά (ευθεία απόδειξη με συνεπαγωγές, αντιθετοαντιστροφή και απαγωγή σε άτοπο).	Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες πραγματικών αριθμών ✓ Πράξεις λογικών	Παράδειγμα: <i>Ευθεία απόδειξη (Συνθετική μέθοδος)</i> • Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $-6 < a \leq 1$. Να χρησιμοποιήσετε την ευθεία απόδειξη για να αποδείξετε ότι $2a + 5 < 7$, επισημαίνοντας τις διαδοχικές αληθείς προτάσεις που χρησιμοποιήσατε, για να καταλήξετε στο τελικό συμπέρασμα.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παραδείγματα: Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα αφού επιλέξετε την κατάλληλη μέθοδο κατά τη γνώμη σας. (α) Να αποδείξετε ότι αν κάθε ακέραιος αριθμός ο οποίος διαιρείται με το 3 και αφήνει υπόλοιπο 2, τότε και ο κύβος του έχει την ίδια ιδότητα.

	προτάσεων ✓ Προτασιακός τύπος ✓ Ποσοδείκτες Νέες Έννοιες ✓ Ευθεία Απόδειξη (Συνθετική Μέθοδος) Ζητούμε να αποδείξουμε ότι η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, δεδομένου ότι η p είναι αληθής. Αρχίζοντας από την αληθή πρόταση p δημιουργούμε μια πεπερασμένη διαδοχή αληθών συνεπαγωγών (που η ορθότητά τους είτε είναι γνωστές από τη θεωρία, είτε τις αποδεικνύουμε) δηλαδή $p \Rightarrow q_1 \Rightarrow q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$ και καταλήγουμε στην ζητούμενη πρόταση q. ✓ Μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής Η μέθοδος στηρίζεται στην ισοδυναμία της πρότασης «η p συνεπάγεται την q» με την πρόταση «η άρνηση της q συνεπάγεται την άρνηση της p». Δηλαδή η τιμή αληθείας της πρότασης $p \Rightarrow q$ είναι ακριβώς η ίδια με την τιμή αληθείας της $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. ✓ Μέθοδος της απαγωγής	Παράδειγμα: <i>Αντιθετοαντιστροφή</i> • Να αποδείξετε, κάνοντας χρήση της μεθόδου της αντιθετοαντιστροφής, ότι: $\forall a \in \mathbb{Z}: (a^2 \text{ περιττός}) \Rightarrow (a \text{ περιττός})$ Παράδειγμα: <i>Απαγωγή σε Άτοπο</i> • Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς a, β με $a\beta \neq 0$. Να δείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $\frac{3a}{\beta}$ και $\frac{\beta}{4a}$ είναι μικρότερος από το 1.	<i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια μορφή έχει ένα ακέραιος αριθμός k με την πιο πάνω ιδιότητα; • Σε ποια μορφή γράφεται ο k^3; • Γιατί με τη μέθοδο της ευθείας απόδειξης οδηγούμαστε σε πιο απλή λύση; (β) i. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και $x \neq 0$, τότε $x^2 > 0$. ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $10^x = 3$ δεν μπορεί να έχει λύση στους ρητούς αριθμούς. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Γιατί σε κάποιες αποδείξεις υπάρχει η ανάγκη να αρχίσουμε, υποθέτοντας ότι το ζητούμενο είναι ψευδής πρόταση; • Τι πρέπει τότε να αποδείξουμε, για να είναι η αρχική μας πρόταση αληθής; (γ) Ο ορισμός για την $1 - 1$ συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ μας λέει ότι $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. (δηλαδή διαφορετικά στοιχεία αντιστοιχούν σε διαφορετικές εικόνες). Να διατυπώσετε την αντιθετοαντίστροφη πρότασή της και να εξηγήσετε γιατί μπορεί να αποτελέσει ισοδύναμο ορισμό. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιες είναι οι τιμές αληθείας δύο προτάσεων που η μία είναι αντιθετοαντίστροφη της άλλης; • Να διατυπώσετε τους δύο ορισμούς και σε λεκτική μορφή και να εξετάσετε κατά
--	---	--	---

	σε άτοπο. Για να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ θεωρούμε ότι δεν ισχύει η πρόταση q και με διαδοχικές συνεπαγωγές καταλήγουμε σε ψευδή πρόταση για την υπόθεση p, που είναι Άτοπο. Αυτό μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι η q είναι τελικά αληθής.		πόσο είναι ισοδύναμοι.
6. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (Αρ5.15) Ορίζουν και διερευνούν την έννοια της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού και τις ιδιότητες και εφαρμογές της στην επίλυση προβλημάτων.	6.1 Ορίζουν και διερευνούν την έννοια της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού και τις ιδιότητες και εφαρμογές της στην επίλυση προβλημάτων Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών ✓ Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων ✓ Αναπαράσταση συνόλου λύσεων ανισώσεων στην αριθμητική γραμμή ✓ Έννοια απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού Νέες Έννοιες ✓ Για ένα πραγματικό αριθμό a ορίζουμε την απόλυτη του τιμή τον μη αρνητικό αριθμό a, για τον οποίο ισχύει:	Παράδειγμα: <i>Ορισμός απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού</i> • Αν $x \in \mathbb{R}$, να ορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x και $x - 3$ και να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία για τον καθένα. Παράδειγμα: <i>Ιδιότητες απόλυτης τιμής</i> • Να ερμηνεύσετε λεκτικά την εξίσωση $x - 4 = 10$ και στη συνέχεια να την λύσετε. • Να αποδείξετε τις πιο κάτω ιδιότητες, να σχολιάσετε τα αποτελέσματα και να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν, όταν $\varepsilon < 0$: (α) Αν $\varepsilon > 0$ και $x = \varepsilon \Leftrightarrow x = \pm \varepsilon$. (β) Αν $\varepsilon > 0$ και $x \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. (γ) Για $\varepsilon > 0$ και $x \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon, \text{ ή } x \geq \varepsilon$.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.</i> Παραδείγματα: 1. (α) Να ελέγξετε κατά πόσο ο αριθμός $x_1 = 10$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $x - 2 + x - 6 = 10$. (β) Να διατυπώσετε λεκτικά την ιδιότητα την οποία έχει ο αριθμός x ο οποίος επαληθεύει την πιο πάνω εξίσωση, χρησιμοποιώντας την έννοια της απόστασης δύο πραγματικών αριθμών στην αριθμητική γραμμή των πραγματικών αριθμών. (γ) Να χρησιμοποιήσετε το (β) για να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός στο διάστημα $[2,6]$ που να επαληθεύει την εξίσωση. (δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακόμα μία λύση και να αιτιολογήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.

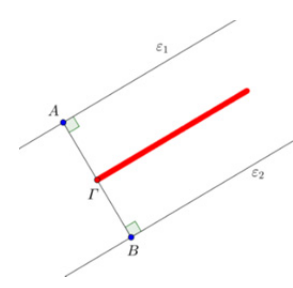
	$ a = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$ ✓ Ιδιότητες απολύτων τιμών ➤ $a \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ ➤ $a = -a , \forall a \in \mathbb{R}$ ➤ $a ^2 = a^2, \forall a \in \mathbb{R}$ ➤ $- a \leq a \leq a , \forall a \in \mathbb{R}$ ✓ Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών x, y στην αριθμητική γραμμή είναι ο πραγματικός αριθμός: $d(x, y) = x - y $ $= y - x $ ✓ Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: ➤ $a \cdot \beta = a \cdot \beta$ ➤ $\left \frac{a}{\beta} \right = \frac{ a }{ \beta }$ ➤ $a + \beta \leq a + \beta$		Απαντώ στις ερωτήσεις: • Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ποια γεωμετρική ερμηνεία δίνεται στην ποσότητα $x - y$; • Πόση συνολική απόσταση έχει ένας αριθμός που βρίσκεται στο διάστημα $[2, 6]$ από τους αριθμούς 2 και 6; • Πώς θα επεκτείνουμε την έννοια της απόστασης μεταξύ δύο αριθμών για να ερμηνεύσουμε την ποσότητα $x - 2 + x - 6$ και στη συνέχεια την εξίσωση $x - 2 + x - 6 = 10$; 2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ υπάρχουν $x, y \in [0, 1]$ τέτοιοι ώστε $xy - ax - \beta y \geq \frac{1}{3}$. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι η άρνηση της πρότασης «για κάθε»; • Γιατί η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής είναι κατάλληλη για την επίλυση αυτού του προβλήματος; • Πώς μπορεί να με βοηθήσει η ταυτότητα $a - \beta \leq a + \beta \leq a + \beta$ στην επίλυση του προβλήματος;
--	--	--	---

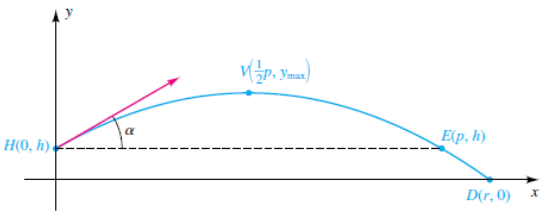
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Γεωμετρικός τόπος σημείου επιπέδου (Γ6.4**) Διερευνούν και κατασκευάζουν, με χάρακα και διαβήτη, το γεωμετρικό τόπο σημείου επιπέδου και τον επιβεβαιώνουν με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού. Διερευνούν βασικούς γεωμετρικούς τόπους (ανάλυση, σύνθεση, κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση).	1.1 Ορίζουν, κατασκευάζουν και επιβεβαιώνουν το γεωμετρικό τόπο σημείου επιπέδου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Βασικές γεωμετρικές έννοιες (κύκλος, μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος, διχοτόμος γωνίας, παράλληλες ευθείες, απόσταση σημείου από ευθεία κτλ.) Νέες Έννοιες ✓ Γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου	Παράδειγμα: Κατασκευή – επιβεβαίωση γεωμετρικού τόπου • Να κατασκευάσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερά σημεία A και B του επιπέδου. Στη συνέχεια, να επιβεβαιώσετε ότι ο πιο πάνω γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB .	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα και να διερευνώ εικασίες. Παράδειγμα: Να ανοίξετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας <i>Geogebra</i> . (α) Να κατασκευάσετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . (β) Να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα AB , κάθετο στις ευθείες ε_1 και ε_2 . (γ) Να κατασκευάσετε το μέσο Γ του ευθύγραμμου τμήματος AB . (δ) Να δώσετε ίχνος στο σημείο Γ και να μετακινείτε το σημείο A κατά μήκος της ε_1 .

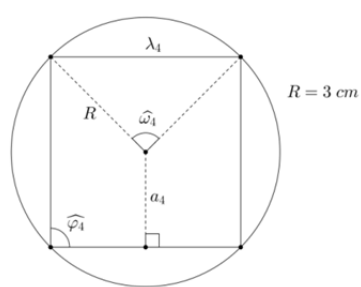
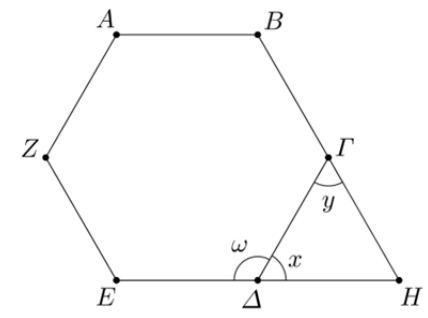
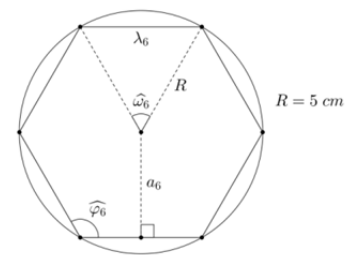
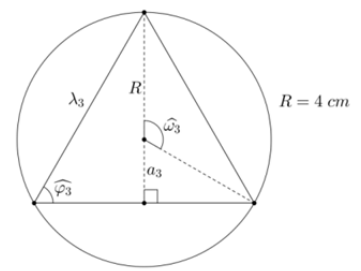
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. Γ6.4) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

	1.2 Αναλύουν, συνθέτουν, αποδεικνύουν και διερευνούν βασικούς γεωμετρικούς τόπους. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Αναλυτική – Συνθετική μέθοδος απόδειξης Νέες Έννοιες ✓ Απόδειξη γεωμετρικού τόπου σημείου του επιπέδου	Παράδειγμα: Απόδειξη βασικών γεωμετρικών τόπων • Να αποδείξετε ότι: (α) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας $\widehat{xOy}$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$ (β) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο K του επιπέδου απόσταση R είναι ο κύκλος (K, R)	 i. Ποια ιδιότητα έχει το σημείο Γ σε σχέση με τις ευθείες ε_1 και ε_2; ii. Τι παριστάνει η «κόκκινη» γραμμή του πιο πάνω σχήματος; Απαντώ στην ερώτηση: • Ποιες πληροφορίες μου δίνει το συγκεκριμένο λογισμικό και πόσο μας βοήθησε να φθάσουμε σε μια εικασία σχετικά με το γεωμετρικό τόπο του σημείου Γ;
2. Γεωμετρικές Κατασκευές (Γ6.5) Δημιουργούν γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.	2.1 Κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα που είναι γεωμετρικοί τόποι σημείων του επιπέδου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου Νέες Έννοιες ✓ Κατασκευή βασικών γεωμετρικών τόπων	Παραδείγματα: Κατασκευή γεωμετρικού σχήματος • Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους λ που κινείται έτσι ώστε $A \in Ox$ και $B \in Oy$. Να κατασκευάσετε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB. • Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB. Να κατασκευάσετε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M του επιπέδου, από το οποίο το ευθύγραμμο τμήμα AB φαίνεται υπό ορθή γωνία.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων. Παράδειγμα: Δίνεται ευθεία (ε) και σημείο A έξω από αυτή. Εικασία: Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M των ευθύγραμμων τμημάτων που ξεκινούν από το A και καταλήγουν στην (ε) είναι μια ευθεία που είναι παράλληλη προς την (ε). Απαντώ στις ερωτήσεις: • Πώς θα ελέγξουμε αρχικά, αν η εικασία αληθεύει; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε την πιο πάνω εικασία;

3. Αναλυτική – Καρτεσιανή Εξίσωση Καμπύλης Γ.Τ. (Γ7.11) Εκφράζουν την ιδιότητα των σημείων του Γ.Τ. υπό μορφή σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων τυχόντος σημείου του Γ.Τ., βρίσκουν την αναλυτική εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκονται τα σημεία του Γ.Τ. και βρίσκουν την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ., αν οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου του Γ.Τ. δίνονται στη μορφή $x = f(t)$, $y = g(t)$ ή $x = f(t, \rho)$, $y = g(t, \rho)$.	3.1 Εκφράζουν την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου στην επίλυση προβλημάτων, όπως είναι η εύρεση της αναλυτικής – καρτεσιανής εξίσωσης του γεωμετρικού τόπου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια συνάρτησης ✓ Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ✓ Μετασχηματισμός τύπου Νέες Έννοιες ✓ Αναλυτική εξίσωση καμπύλης ✓ Καρτεσιανή εξίσωση καμπύλης	Παραδείγματα: <i>Αναλυτική – Καρτεσιανή εξίσωση γεωμετρικού τόπου</i> • Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου $A(x, y)$, όταν: (α) $x = 2t^2, y = 4t, t \geq 0$ (β) $x = t^2 + \rho^2, y = (t + \rho)^2, t\rho = -1, t, \rho \in \mathbb{R}$ (γ) $x = \sqrt{t}, y = 3t + 4, t \geq 0$ (δ) $x = (t + 1)^3, y = (t + 2)^2, -1 \leq t \leq 2$ (ε) $x = e^t, y = e^{-2t}, t \in \mathbb{R}$ (στ) $x = \varepsilon\phi t, y = 1, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ • Να βρείτε την αναλυτική εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου $A(x, y)$, όταν: (α) $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta, y = 3\eta\mu\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (β) $x = \sigma\upsilon\nu\theta - 2, y = \eta\mu\theta + 3, \theta \in [0, 2\pi]$ (γ) $x = \tau\epsilon\mu\theta, y = \varepsilon\phi\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.</i> Παράδειγμα: Η πορεία ενός βλήματος τη χρονική στιγμή t μπορεί να μοντελοποιηθεί, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $x(t) = (s \cdot \sigma\upsilon\nu a)t$, $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (s \cdot \eta\mu a)t + h, t \geq 0$, όπου, για $t = 0$, s είναι η ταχύτητα του βλήματος σε ft/s, a είναι η γωνία που σχηματίζει η πορεία του με τον ορίζοντα και h το ύψος του σε ft. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 32 ft/s^2$. Το βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα $1024 ft/s$ με γωνία 30° σε σχέση με τον ορίζοντα από ύψος $2034 ft$.  (α) Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της πορείας του βλήματος, χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω δεδομένα. (β) Να βρείτε το βεληνεκές του βλήματος (η οριζόντια απόσταση που διανύει μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος).
---	---	--	--

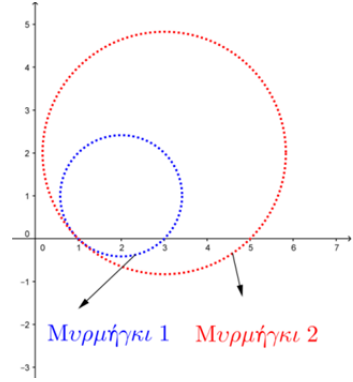
			(γ) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της πορείας του βλήματος. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική;
4. Εγγεγραμμένα – Περιγεγραμμένα Τετράπλευρα σε Κύκλο (Γ6.10) Ορίζουν ιδιότητες εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο και διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες και τα κριτήρια εγγράψιμων και περιγράψιμων τετραπλεύρων.	4.1 Ορίζουν τα εγγεγραμμένα και τα περιγεγραμμένα τετράπλευρα σε κύκλο. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Βασικές γεωμετρικές έννοιες (κύκλος, εγγεγραμμένη γωνία, εφαπτομένη κύκλου, θεώρημα χορδής και εφαπτομένης κτλ.) Νέες Έννοιες ✓ Εγγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο ✓ Περιγεγραμμένος κύκλος σε τετράπλευρο ✓ Περιγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο ✓ Εγγεγραμμένος κύκλος σε τετράπλευρο	Παραδείγματα: <i>Ορισμός εγγεγραμμένων – περιγεγραμμένων τετραπλεύρων σε κύκλο</i> • Πότε ένα τετράπλευρο ονομάζεται εγγεγραμμένο σε κύκλο και πότε περιγεγραμμένο; • Να εγγράψετε ένα τετράπλευρο σε δοσμένο κύκλο και να περιγράψετε ένα κύκλο σε δοσμένο τετράπλευρο.	
	4.2 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες εγγράψιμων και περιγράψιμων τετραπλεύρων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Εξωτερική γωνία,	Παραδείγματα: <i>Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων</i> • Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $\hat{A} = 109^\circ$ και $\hat{B} = 63^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$. • Είναι δυνατόν ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A_{εξ}} = 80^\circ$ να είναι	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα για να ερμηνεύσω ένα πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.</i> Παράδειγμα: Έστω E ένα σημείο του ύψους AD ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και Z, H οι προβολές του E στις πλευρές του $AB, A\Gamma$

	παραπληρωματικές γωνίες, εγγεγραμμένη γωνία ✓ Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου ✓ Σχετικές θέσεις ευθείας – κύκλου ✓ Μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος Νέες Έννοιες ✓ Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων ✓ Ιδιότητες περιγεγραμμένων τετραπλεύρων	εγγεγραμμένο σε κύκλο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. • Να αποδείξετε ότι αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.	αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, Γ, H και Z. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια στρατηγική μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να λύσω το πρόβλημα; • Πώς μπορεί η κατασκευή του σχήματος να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος;
	4.3 Εφαρμόζουν τα κριτήρια εγγράψιμων και περιγράψιμων τετραπλεύρων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων ✓ Ιδιότητες περιγεγραμμένων τετραπλεύρων Νέες Έννοιες ✓ Κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων ✓ Κριτήριο περιγράψιμων τετραπλεύρων	Παραδείγματα: <i>Κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων</i> • Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη AD και BE. Να αποδείξετε ότι: (α) Το τετράπλευρο $ABDE$ είναι εγγράψιμο (β) Η DE είναι παράλληλη στην εφαπτομένη του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλου, στο σημείο Γ • Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου και το ίχνος ενός ύψους του είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.	ΜΠ.6 Ακρίβεια <i>Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.</i> Παραδείγματα: Να διατυπώσετε τα κριτήρια εγγράψιμων τετραπλεύρων και στη συνέχεια να δώσετε απόδειξη για το καθένα από αυτά. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα τρία κριτήρια των εγγράψιμων τετραπλεύρων; • Ποιες έννοιες χρησιμοποιώ, για να αποδείξω τα συγκεκριμένα κριτήρια;
5. Κανονικά Πολύγωνα (Γ5.11) Ορίζουν τα κανονικά πολύγωνα, αποδεικνύουν και	5.1 Ορίζουν τα κανονικά πολύγωνα και αναφέρουν τα στοιχεία τους.	Παράδειγμα: <i>Ορισμός κανονικού πολυγώνου</i> • Να εγγράψετε τετράγωνο σε κύκλο με ακτίνα R και να σημειώσετε στο σχήμα	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό <i>Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις.</i>

εφαρμόζουν τις ιδιότητες τους στην επίλυση προβλημάτων (πλευρά κανονικού πολυγώνου, γωνία κανονικού πολυγώνου, απόστημα, κεντρική γωνία, περίμετρος, εμβαδόν).	Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Βασικές γεωμετρικές έννοιες (κύκλος, εγγεγραμμένα πολύγωνα κτλ.) Νέες Έννοιες ✓ Ορισμός κανονικού πολυγώνου ✓ Στοιχεία κανονικού πολυγώνου	μία γωνία, μία κεντρική γωνία, μία πλευρά και ένα απόστημά του.	Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις. Παράδειγμα: Στα πιο κάτω σχήματα, να υπολογίσετε όλα τα στοιχεία που είναι σημειωμένα σε αυτά. <u>Σχήμα (1)</u> 
	5.2 Διατυπώνουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός – στοιχεία κανονικού πολυγώνου Νέες Έννοιες ✓ Βασικές ιδιότητες κανονικών πολυγώνων	Παραδείγματα: <i>Ιδιότητες κανονικού πολυγώνου</i> • Σε κύκλο ακτίνα R εγγράφουμε τετράγωνο, κανονικό εξάγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις: ➤ $\lambda_4 = R\sqrt{2}, a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ➤ $\lambda_6 = R, a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ➤ $\lambda_3 = R\sqrt{3}, a_3 = \frac{R}{2}$ • Στο πιο κάτω σχήμα, το εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ είναι κανονικό.  ➤ Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ και $\hat{\omega}$. ➤ Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο HBE είναι ισοσκελές.	<u>Σχήμα (2)</u>  <u>Σχήμα (3)</u>  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Υπάρχει κάποιος μαθηματικός κανόνας για τον υπολογισμό των στοιχείων αυτών;

			• Σε τι προβλέψεις ή γενικεύσεις μπορούν να οδηγήσουν όλοι αυτοί οι υπολογισμοί; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε κάποιες μαθηματικές σχέσεις για τον υπολογισμό των αντίστοιχων στοιχείων για ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές;
6. Ορισμός Κύκλου ως Κωνική Τομή (Γ8.2) Ορίζουν και διερευνούν τις κωνικές τομές ως τομή επιπέδου με δύο ίσους κώνους με κοινό άξονα και κοινή κορυφή.	6.1 Ορίζουν και διερευνούν τον κύκλο ως τομή ενός επιπέδου με δύο ίσους κώνους με κοινό άξονα και κοινή κορυφή. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κύκλος ✓ Βασικά Στοιχεία Κώνου Νέες έννοιες ✓ Κωνική τομή ✓ Κύκλος ως κωνική τομή	Παράδειγμα: <i>Ορισμός κύκλου ως κωνική τομή</i> • Να αναφέρετε το είδος της κυκλικής τομής που προκύπτει από την τομή ενός επιπέδου με έναν ορθό κυκλικό κώνο, έτσι ώστε το επίπεδο να είναι παράλληλο προς τη βάση του κώνου.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κατασκευάζω σχήματα.</i> Παράδειγμα: Με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, να κατασκευάσετε κύκλους ως κωνική τομή επιπέδου με δύο ίσους κώνους και με κοινό άξονα και κοινή κορυφή. <i>Απαντώ στην ερώτηση:</i> • Ποιες πληροφορίες μου δίνει το συγκεκριμένο λογισμικό;
7. Αναλυτική Εξίσωση Κύκλου (Γ8.3) Ορίζουν, διερευνούν και αποδεικνύουν τις αναλυτικές εξισώσεις των κωνικών τομών ως το γεωμετρικό τόπο σημείων επιπέδου με κοινή ιδιότητα.	7.1 Ορίζουν και αποδεικνύουν την αναλυτική εξίσωση του κύκλου ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κύκλος ως κωνική τομή	Παραδείγματα: <i>Αναλυτική εξίσωση κύκλου</i> • Έστω $O(0, 0)$ σταθερό σημείο του επιπέδου. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου σημείων $T(x, y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $(TO) = 5$ μονάδες • Έστω $A(a, \beta)$ σταθερό σημείο του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου σημείων $T(x, y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, για να κατανοήσω προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda + 10)y + 5\lambda + 15 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. (α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (β) Να γράψετε τις συντεταγμένες του

	Νέες Έννοιες ✓ Αναλυτική εξίσωση κύκλου	$(TA) = R$ μονάδες, είναι η: $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$	κέντρου και την ακτίνα του πιο πάνω κύκλου συναρτήσει του λ. (γ) Να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την αρχική εξίσωση ανήκουν σε μία ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (δ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την αρχική εξίσωση για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρείτε. (ε) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από την αρχική εξίσωση να ανήκει στην ευθεία (ε): $3x - y + 15 = 0$. (στ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος που ορίζεται από την αρχική εξίσωση έχει ακτίνα ίση με 5 μονάδες. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια διαδικασία μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να απαντήσω στο ερώτημα (α); Μπορώ να χρησιμοποιήσω διαφορετική διαδικασία από αυτήν; • Ποιες έννοιες - ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στα υπόλοιπα ερωτήματα; • Τι δείχνει η παράμετρος λ που εμφανίζεται στο πρόβλημα;
	7.2 Εφαρμόζουν την αναλυτική εξίσωση του κύκλου στην επίλυση προβλήματος Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Βασικά στοιχεία κύκλου (κέντρο, ακτίνα, διάμετρος, εφαπτομένη) ✓ Απόσταση δύο σημείων, απόσταση σημείου από ευθεία, μέσο ευθύγραμμου τμήματος ✓ Αναλυτική εξίσωση κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Εύρεση ακτίνας-κέντρου ενός κύκλου μέσα από την αναλυτική εξίσωσή του	Παραδείγματα: <i>Αναλυτική εξίσωση κύκλου</i> • Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος: (α) έχει κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα $R = 4$ μονάδες (β) έχει κέντρο $K(-8, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$ (γ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB, με $A(-6, 14)$ και $B(2, 8)$ (δ) έχει κέντρο $K(3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $4x - 3y + 6 = 0$ • Να δείξετε ότι η καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο και να αναφέρετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου σε κάθε περίπτωση: (α) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ (β) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 15 = 0$	
8. Αναπαράσταση Κύκλου (Γ8.4) Αναπαριστούν τις κωνικές τομές σε γραφικές παραστάσεις.	8.1 Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση του κύκλου, όταν δίνεται το κέντρο και η ακτίνα του. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Καρτεσιανό σύστημα	Παραδείγματα: <i>Γραφική παράσταση κύκλου</i> • Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των πιο κάτω κύκλων. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τη γραφική τους παράσταση: (α) $x^2 + y^2 = 16$	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Εφαρμόζω γενικούς κανόνες, για να λύσω πιο σύνθετα προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(-4, 3)$.

	συντεταγμένων ✓ Αναλυτική εξίσωση κύκλου ✓ Εύρεση ακτίνας-κέντρου ενός κύκλου μέσα από την αναλυτική εξίσωσή του Νέες Έννοιες ✓ Γραφική αναπαράσταση κύκλου	(β) $x^2 + y^2 - 2y = 9$ (γ) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ (δ) $3x^2 + 3y^2 + 6x = 1$ • Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του γεωμετρικού τόπου των σημείων $P(x, y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει ότι η απόσταση τους από το σημείο $A(6, 0)$ είναι διπλάσια από την απόστασή τους από το σημείο $B(0, 3)$.	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος; • Ποια μέρη του προβλήματος μπορούν να απλοποιηθούν; • Πώς θα βρω το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου;
9. Ιδιότητες Κύκλου (Γ8.5) Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες των κωνικών τομών.	9.1 Διατυπώνουν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες του κύκλου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Διάκεντρος δύο κύκλων ✓ Θεώρημα Ακτίνας - Εφαπτομένης ✓ Σχετική θέση ευθείας - κύκλου ✓ Σχετική θέση δύο κύκλων Νέες Έννοιες ✓ Ιδιότητες κύκλου ➤ Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του. ➤ Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής στην οποία αντιστοιχεί. ➤ Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο P προς έναν κύκλο με κέντρο K είναι ίσα και η KP διχοτομεί τη γωνιά τους.	Παραδείγματα: <i>Ιδιότητες κύκλου</i> • Να αποδείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά σημεία. Στη συνέχεια, να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $A(3, 4)$ και έχουν ακτίνα $R = 10$ μονάδες. • Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και βεβαιώνομαι ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.</i> Παράδειγμα: Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 2016 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, \dots, 2016$ και κινείται στο καρτεσιανό επίπεδο, διαγράφοντας μία τροχιά με εξίσωση: $(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1)$ Η τροχιά των μυρμηγκιών 1 και 2 φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. 

	➤ Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά. ➤ Οι κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων τέμνονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους (Ειδική περίπτωση αποτελούν οι παράλληλες εφαπτομένες δύο ίσων κύκλων). ➤ Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.		Να αποδείξετε ότι: (α) Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του. (β) Κατά τη κίνησή τους, όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A; (γ) Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $(\varepsilon): x + y - 1 = 0$. Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;
	9.2 Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του κύκλου στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ιδιότητες κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Χρήση ιδιοτήτων κύκλου στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Ιδιότητες κύκλου</i> • Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(2, 7)$ και εφάπτεται στον κύκλο $(c_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ στο σημείο $B(0, 5)$. • Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία $A(2, 3), B(3, 6)$ και εφάπτονται στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 2 = 0$.	
10.Θέση Σημείου – Ευθείας ως προς Κύκλο (Γ8.6) Αναφέρουν και διερευνούν γεωμετρικά και αλγεβρικά τη θέση σημείου ή ευθείας με τις κωνικές τομές.	10.1 Εφαρμόζουν τη θέση ευθείας ως προς κύκλο στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Σχετική θέση ευθείας ως προς κύκλο ✓ Αλγεβρική επίλυση	Παράδειγμα: <i>Σχετική θέση ευθείας ως προς κύκλο</i> • Δίνεται ο κύκλος $(c): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ και οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 18 = 0$, $(\varepsilon_2): 2x - y - 8 = 0$. (α) Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου (c) με καθεμία από τις	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.

	συστήματος β' βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους Νέες Έννοιες ✓ Αλγεβρική διερεύνηση σχετικής θέσης ευθείας ως προς κύκλο	ευθείες (ε_1) και (ε_2). (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου (c) με όποια από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) τον τέμνει. (γ) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ζ): $ax - y + a + 2 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο (c).	Παράδειγμα: (α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = mx + \rho\sqrt{1+m^2}$ εφάπτεται στον κύκλο (c): $x^2 + y^2 = \rho^2$ για κάθε $m \in \mathbb{R}$. (β) Να μελετήσετε τη σχετική θέση της ευθείας με εξίσωση (ε): $y = \lambda x + \beta$ ως προς τον κύκλο με εξίσωση (c): $x^2 + y^2 = R^2$.
	10.2 Εφαρμόζουν τη θέση σημείου ως προς κύκλο στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Δύναμη σημείου ως προς κύκλο ✓ Σχετική θέση σημείου ως προς κύκλο Νέες Έννοιες ✓ Χρήση θέσης σημείου ως προς κύκλο στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Σχετική θέση σημείου ως προς κύκλο</i> • Δίνεται ο κύκλος (c): $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ και τα σημεία $A(-6, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να βρείτε: (α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c). (β) τη σχετική θέση των σημείων A, B και Γ ως προς τον κύκλο (c)	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια μαθηματική ορολογία θα χρησιμοποιήσω, για να εξηγήσω στους άλλους τον τρόπο εργασίας μου; • Ποια θα ήταν μια πιο αποτελεσματική στρατηγική; • Πώς μπορώ να ελέγξω τις απαντήσεις μου, για να εξετάσω αν δίνουν λύση στο πρόβλημα;
11.Εξίσωση Εφαπτομένης – Κάθετης Κύκλου (Γ8.7) Βρίσκουν και εφαρμόζουν τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης των κωνικών τομών.	11.1 Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης του κύκλου σε σημείο αυτού. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Θεώρημα Ακτίνας - Εφαπτομένης ✓ Κλίση ευθείας ✓ Συνθήκη παραλληλίας ευθειών ✓ Συνθήκη καθετότητας ευθειών ✓ Εξίσωση ευθείας Νέες Έννοιες ✓ Εξίσωση εφαπτομένης – κάθετης κύκλου	Παραδείγματα: <i>Εξίσωση εφαπτομένης – κάθετης κύκλου</i> • Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = R^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η (ε): $xx_1 + yy_1 = R^2$ • Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (c): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ που είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$. • Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του $A(3, 4)$.	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση <i>Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα, για να ερμηνεύσω ένα πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.</i> Παράδειγμα: Δίνεται ο κύκλος (c): $x^2 + y^2 = 20$. Από το σημείο $M(4, 8)$ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου (c) (A, B τα σημεία επαφής με τον κύκλο). Να βρείτε: (α) την εξίσωση της ευθείας AB (β) τις εφαπτομένες του κύκλου (c) που είναι κάθετες στην AB Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια στρατηγική μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να λύσω το

	11.2 Εφαρμόζουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης του κύκλου στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Εξίσωση εφαπτομένης – κάθετης κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Χρήση εξίσωσης εφαπτομένης – κάθετης κύκλου στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Εξίσωση εφαπτομένης – κάθετης κύκλου</i> • Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $(c): x^2 + y^2 = 100$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Sigma(10, 20)$. • Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία $A(2, 3), B(3, 6)$ και εφάπτονται στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + y - 2 = 0$.	πρόβλημα; • Πώς με βοηθά η κατασκευή ενός σχήματος;
12.Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου (Γ8.8) Βρίσκουν, αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις παραμετρικές εξισώσεις των κωνικών τομών.	12.1 Βρίσκουν και αναγνωρίζουν τις παραμετρικές εξισώσεις κύκλου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Γωνία τοποθετημένη σε κανονική θέση ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ✓ Αναλυτική εξίσωση κύκλου Νέες Έννοιες ✓ Έστω C μία επίπεδη καμπύλη που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $(f(t), g(t))$, όπου f και g είναι ορισμένες στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Οι εξισώσεις $x = f(t), y = g(t), t \in \Delta$, καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της C. ✓ Οι παραμετρικές	Παραδείγματα: <i>Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου</i> • Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $(c): x^2 + y^2 = R^2$. • Να δείξετε ότι η καμπύλη με $x = 4\sin\theta - 2, y = 4\eta\mu\theta + 1, \theta \in [0, 2\pi)$ είναι κύκλος, του οποίου να αναφέρετε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Να ανοίξετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας <i>Geogebra</i>. (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του κύκλου με εξίσωση $(c): x^2 + y^2 = 25$. (β) Να τοποθετήσετε ένα σημείο A πάνω στον κύκλο (c). (γ) Να φέρετε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου (c) στο σημείο A. (δ) Να σημειώσετε τα σημεία τομής B, Γ της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x, y'y$, αντίστοιχα. (ε) Να κατασκευάσετε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$. (στ) Να ενεργοποιήσετε το ίχνος του

εξισώσεις του κύκλου
(c): $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$
είναι οι:

$$x = a + R\cos\theta$$

$$y = \beta + R\sin\theta,$$

όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

12.2 Εφαρμόζουν τις
παραμετρικές εξισώσεις
κύκλου στην επίλυση
προβλήματος.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

✓ Παραμετρικές εξισώσεις
κύκλου

Νέες Έννοιες

✓ Χρήση παραμετρικών
εξισώσεων κύκλου στην
επίλυση προβλήματος

Παραδείγματα:

Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

• Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής A
των ευθειών $(\varepsilon_1): x\cos\theta + y = 1$ και
 $(\varepsilon_2): x - y\sin\theta = 1$, με $\theta \in \mathbb{R}$
κινείται σε κύκλο.

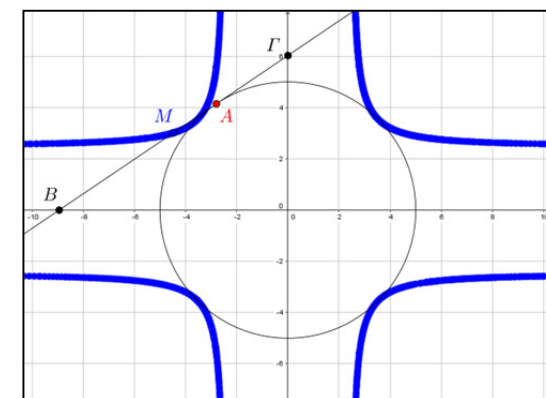
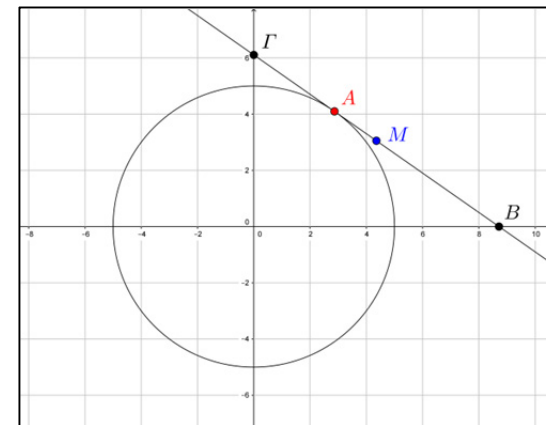
• Σημείο A κινείται πάνω στον κύκλο
(c): $x^2 + y^2 = 16$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της
εφαπτομένης του κύκλου στο
σημείο A είναι:

$$(\varepsilon): x\cos\theta + y\sin\theta = 4$$

• Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα των x' στο B. Από το B φέρουμε ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και στο σημείο A την κάθετη του κύκλου (ε_2) . Αν Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) , να δείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Γ έχει εξίσωση $16(x^2 + y^2) = x^4$.

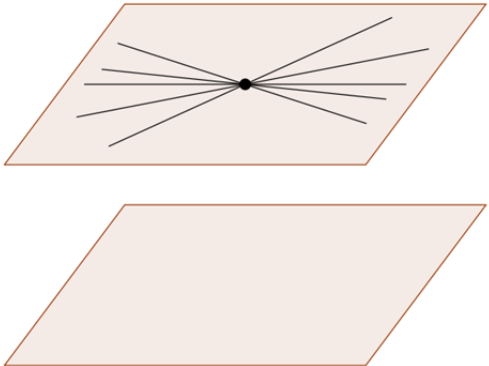
σημείου M και να δώσετε κίνηση στο
σημείο A.

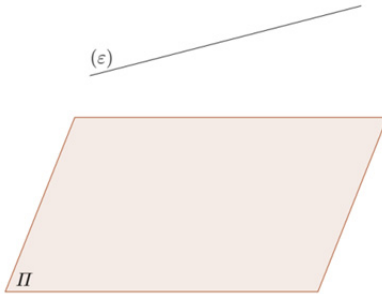


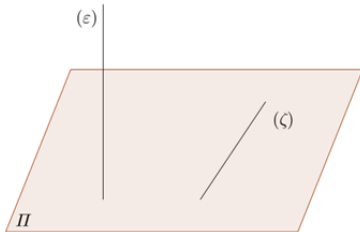
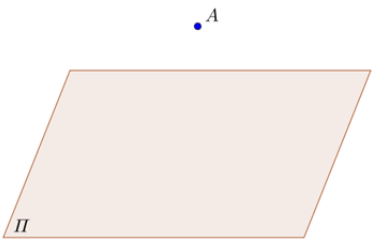
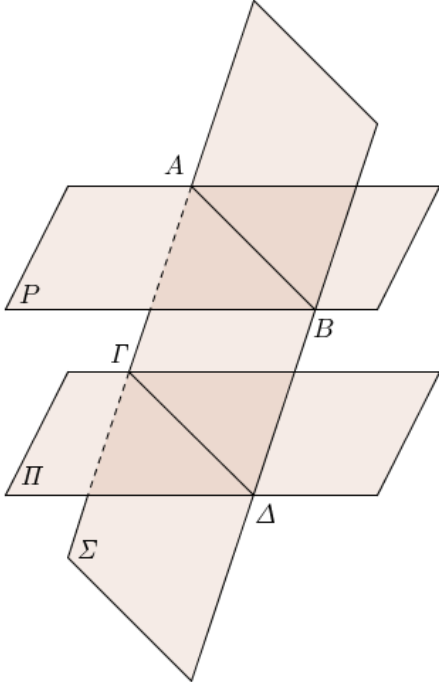
- Ποια είναι η σημασία της «σχηματιζόμενης» καμπύλης;
- Να βρείτε την εξίσωση της «σχηματιζόμενης» καμπύλης.

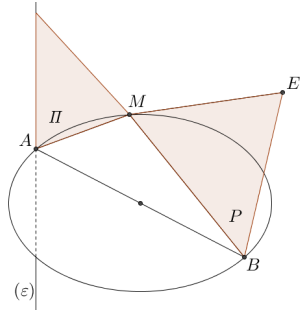
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες πληροφορίες αντλώ από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο;
- Τι μπορεί να μου δείξει το λογισμικό που δεν θα μπορούσα να το δω εύκολα;

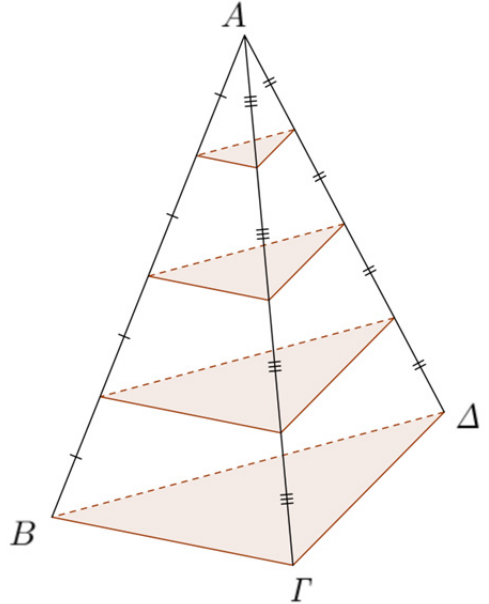
13.Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες στο Χώρο (Γ7.2) Ορίζουν βασικές έννοιες της Γεωμετρίας στο χώρο (σημείο, ευθεία, επίπεδο) και διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο.	13.1 Ορίζουν το σημείο, την ευθεία και το επίπεδο στο χώρο. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Επίπεδο ✓ Σημείο στο επίπεδο ✓ Ευθεία στο επίπεδο Νέες Έννοιες ✓ Σημείο στο χώρο ✓ Ευθεία στο χώρο	Παράδειγμα: <i>Έννοιες Γεωμετρίας στο χώρο</i> • Να εξηγήσετε γιατί μία καρέκλα με τρία πόδια είναι πάντοτε σταθερή, ενώ μια καρέκλα με τέσσερα πόδια όχι.	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών <i>Εφαρμόζω γενικούς κανόνες, για να λύσω πιο σύνθετα προβλήματα.</i> Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο και οι οποίες διέρχονται από το σημείο A, βρίσκονται όλες σε ένα επίπεδο παράλληλο προς το αρχικό επίπεδο. 
	13.2 Διερευνούν τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Παράλληλες ευθείες ✓ Τεμνόμενες ευθείες ✓ Ασύμβατες ευθείες Νέες Έννοιες ✓ Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο	Παράδειγμα: <i>Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο</i> • Δύο ασύμβατες ευθείες (α) και (β) τέμνονται από μία ευθεία (ε) στα σημεία A και B, αντίστοιχα και από μια άλλη ευθεία (ζ) στα σημεία Γ και Δ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι και οι ευθείες (ε) και (ζ) είναι ασύμβατες.	
	13.3 Διερευνούν τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου στο χώρο και τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ευθεία που ανήκει σε ένα επίπεδο ✓ Ευθεία που είναι παράλληλη με ένα επίπεδο ✓ Ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο ✓ Ευθεία που είναι κάθετη σε ένα επίπεδο	Παραδείγματα: <i>Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου</i> • Δίνεται κύκλος (O, R) και δύο ασύμβατες ευθείες (ε_1) και (ε_2). Να κατασκευάσετε ευθεία που να τέμνει και τον κύκλο και τις δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2). • Να αποδείξετε ότι αν n ευθείες τέμνονται ανά δύο και δεν βρίσκονται πάνω σ' ένα επίπεδο, τότε οι ευθείες αυτές περνούν από ένα σημείο. • Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η ευθεία (ε) που περνά από το A και είναι κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο της (ε) και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Delta M \perp B\Gamma$.	<i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος; • Ποια μέρη του προβλήματος μπορούν να απλοποιηθούν;

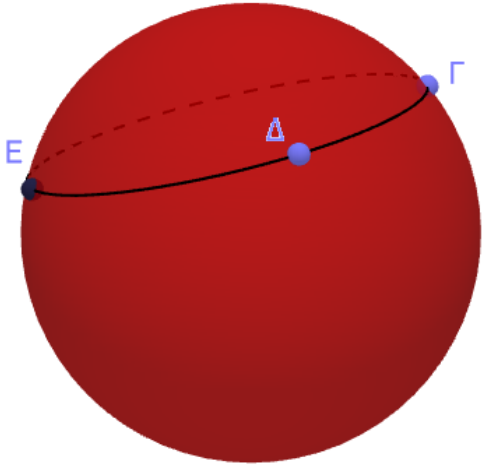
	Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή σχετικών θέσεων ευθείας και επιπέδου στην επίλυση προβλήματος		
	13.4 Διερευνούν τις σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο και τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Παράλληλα επίπεδα ✓ Τεμνόμενα επίπεδα Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή σχετικών θέσεων δύο επιπέδων στο χώρο στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στο χώρο</i> • Δίνονται ένα επίπεδο P, μία ευθεία (ε) και ένα σημείο O του χώρου. Να φέρετε από το O ένα επίπεδο Π κάθετο στο P και παράλληλο προς την ευθεία (ε). • Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα P και Π, ένα ευθύγραμμο τμήμα MN παράλληλο προς τα πιο πάνω επίπεδα και δύο τυχαία σημεία A και B του επιπέδου P. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών MA, MB, NA και NB με το επίπεδο Π είναι κορυφές παραλληλογράμμου.	
14.Προβολή σε Επίπεδο (Γ7.3) Ορίζουν τις έννοιες προβολή σημείου, ευθύγραμμου τμήματος και ευθείας σε επίπεδο.	14.1 Ορίζουν την προβολή σημείου, ευθύγραμμου τμήματος, ευθείας και σχήματος σε επίπεδο. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ίχνος σημείου ✓ Ευθεία που είναι κάθετη σε ένα επίπεδο Νέες Έννοιες ✓ Ονομάζουμε ορθή προβολή (ή απλά προβολή) ενός σημείου A στο επίπεδο Π το ίχνος A' της καθέτου από το A προς το επίπεδο Π. ✓ Ονομάζουμε προβολή ενός ευθύγραμμου	Παράδειγμα: <i>Προβολή σχήματος σε επίπεδο</i> • Δίνεται επίπεδο Π και ευθεία (ε), η οποία δεν είναι κάθετη στο Π. Να προβάλετε την ευθεία (ε) στο επίπεδο Π και να αποδείξετε ότι η προβολή αυτή είναι ευθεία. 	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. <i>Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Δίνεται επίπεδο Π και ορθή γωνία $\widehat{xOy}$, της οποίας η πλευρά Ox είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π. <i>Εικασία:</i> Η προβολή της γωνίας $\widehat{xOy}$ στο επίπεδο Π είναι ορθή γωνία. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς θα ελέγξουμε αρχικά, αν η εικασία αληθεύει; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε την πιο πάνω εικασία;

	τμήματος (ή ευθείας ή σχήματος) στο επίπεδο Π το σύνολο των προβολών του στο επίπεδο Π.		
15.Εφαρμογή Βασικών Γεωμετρικών Εννοιών του Χώρου στην Επίλυση Προβλήματος (Γ7.4) Ορίζουν και εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων τη γωνία ευθείας και επιπέδου, τη γωνία δυο ευθειών στον χώρο, τις ορθογώνιες ευθείες, την απόσταση σημείου από επίπεδο, την απόσταση δυο παράλληλων επιπέδων, τη διέδρη γωνία, την αντίστοιχη επίπεδη μιας διέδρης και τα κάθετα επίπεδα.	15.1 Ορίζουν τη γωνία ευθείας και επιπέδου, τη γωνία δυο ευθειών στον χώρο, τις ορθογώνιες ευθείες, την απόσταση σημείου από επίπεδο, την απόσταση δυο παράλληλων επιπέδων, τη διέδρη γωνία, την αντίστοιχη επίπεδη μιας διέδρης και τα κάθετα επίπεδα. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Προβολή σημείου σε επίπεδο ✓ Ασύμβατες ευθείες ✓ Προβολή ευθείας σε επίπεδο ✓ Απόσταση σημείου από ευθεία ✓ Γεωμετρικός τόπος ✓ Σχετικές θέσεις επιπέδων στο χώρο Νέες Έννοιες ✓ Γωνία ευθείας και επιπέδου ✓ Γωνία δύο ευθειών στο χώρο ✓ Ορθογώνιες ευθείες ✓ Απόσταση σημείου από επίπεδο ✓ Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων	Παραδείγματα: <i>Γωνία δύο ευθειών στο χώρο</i> • Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται οι ασύμβατες ευθείες (ε) και (ζ). Να κατασκευάσετε τη γωνία των δύο ευθειών.  <i>Απόσταση σημείου από επίπεδο – Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων – Κάθετα επίπεδα</i> • Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ένα επίπεδο Π και ένα σημείο A εκτός αυτού.  (α) Να κατασκευάσετε την απόσταση του σημείου A από το επίπεδο Π. (β) Να κατασκευάσετε ένα παράλληλο επίπεδο προς το Π, το οποίο να περιέχει το σημείο A.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα Π και P, τα οποία τέμνονται από ένα τρίτο επίπεδο Σ. 

	✓ Διέδρη γωνία ✓ Αντίστοιχη επίπεδη γωνία διέδρης ✓ Κάθετα επίπεδα 15.2 Εφαρμόζουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες του χώρου στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Γωνία ευθείας και επιπέδου ✓ Γωνία δύο ευθειών στο χώρο ✓ Ορθογώνιες ευθείες ✓ Απόσταση σημείου από επίπεδο ✓ Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων ✓ Διέδρη γωνία ✓ Αντίστοιχη επίπεδη γωνία διέδρης ✓ Κάθετα επίπεδα Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή βασικών γεωμετρικών εννοιών του χώρου στην επίλυση προβλήματος	(γ) Να κατασκευάσετε ένα κάθετο επίπεδο προς το Π, το οποίο να περιέχει το σημείο A. Παραδείγματα: <i>Κάθετα επίπεδα</i> • Δίνεται κύκλος (c) διαμέτρου AB και τυχαίο σημείο E, που βρίσκεται εκτός του επιπέδου του κύκλου (c). Αν M είναι τυχαίο σημείο του κύκλου (c) και (ε) είναι η κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου (c) στο σημείο A, να αποδείξετε ότι τα επίπεδα Π και P που ορίζονται, το πρώτο από την ευθεία (ε) και το σημείο M και το δεύτερο από τα σημεία B, M και E είναι κάθετα.  <i>Διέδρη γωνία</i> • Δίνεται μία διέδρη γωνία $\widehat{ΠΕΡ}$, ένα σημείο O της ακμής (ε) και ένα σημείο M στο εσωτερικό της γωνίας, τέτοιο, ώστε η OM να μην είναι κάθετη σε καμία από τις έδρες της γωνίας, ούτε προς την (ε). Να φέρετε επίπεδο, που να περνά από την OM και να τέμνει τις έδρες της γωνίας, έτσι ώστε η γωνίας των τομών να έχει διχοτόμο την ευθεία OM.	(α) Να συγκρίνετε δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη διέδρες γωνίες που σχηματίζονται από τα παράλληλα επίπεδα Π και P, τα οποία τέμνονται από το επίπεδο Σ. (β) Να συγκρίνετε δύο εντός εναλλάξ διέδρες γωνίες που σχηματίζονται από τα παράλληλα επίπεδα Π και P, τα οποία τέμνονται από το επίπεδο Σ. (γ) Να βρείτε το άθροισμα δύο εντός και επί τα αυτά μέρη διέδρων γωνιών που σχηματίζονται από τα παράλληλα επίπεδα Π και P, τα οποία τέμνονται από το επίπεδο Σ. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποιες πληροφορίες μου δίνει το συγκεκριμένο σχήμα; • Τι μπορεί να μου δείξει το σχήμα που δεν θα μπορούσα να το δω εύκολα;
--	--	---	---

16.Θεωρήματα Παραλληλίας – Καθετότητας (Γ7.5) Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων τα θεωρήματα παραλληλίας και καθετότητας.	16.1 Αποδεικνύουν τα θεωρήματα παραλληλίας και καθετότητας. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Σχετικές θέσεις δύο ευθειών, ευθείας – επιπέδου, δύο επιπέδων ✓ Μέθοδοι απόδειξης ✓ Γεωμετρικός τόπος Νέες Έννοιες ✓ Χρήση μεθόδων στη απόδειξη θεωρημάτων παραλληλίας και καθετότητας	Παραδείγματα: <i>Θεωρήματα παραλληλίας - καθετότητας</i> • Δίνονται οι τεμνόμενες ευθείες (ε_1) και (ε_2) του επιπέδου Π και μία τρίτη ευθεία (ε_3), που δεν ανήκει στο επίπεδο Π. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία (ε_3) είναι κάθετη στις (ε_1) και (ε_2) στο σημείο τομής τους, τότε είναι κάθετη και στο επίπεδο Π των δύο ευθειών. • Να αποδείξετε ότι δύο ευθείες (ε) και (ζ), κάθετες προς το ίδιο επίπεδο Π, είναι παράλληλες μεταξύ τους.	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος <i>Διαβάζω το πρόβλημα, κατανοώ τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το λύσω. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και βεβαιώνομαι ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη.</i> Παράδειγμα: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η ευθεία (ε), που περνά από το A και είναι κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$. Αν Δ είναι τυχαίο σημείο της (ε) και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Delta M \perp B\Gamma$.
	16.2 Εφαρμόζουν τα θεωρήματα παραλληλίας και καθετότητας στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Θεωρήματα παραλληλίας – καθετότητας Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή θεωρημάτων παραλληλίας και καθετότητας στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Θεωρήματα παραλληλίας - καθετότητας</i> • Δίνεται κύκλος (K, ρ), AK ευθύγραμμο τμήμα στο επίπεδο Π του κύκλου και M τυχαίο σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M. • Αν ένα επίπεδο περνά από τη μία διαγώνιο ενός παραλληλογράμμου, να αποδείξετε ότι τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα, που φέρουμε από τα άκρα της άλλης διαγωνίου του παραλληλογράμμου προς το επίπεδο αυτό, είναι ίσα. • Δίνεται το επίπεδο Π, το σημείο O αυτού και το σημείο A εκτός του επιπέδου Π. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των προβολών του A πάνω στις ευθείες του επιπέδου Π, που περνούν από το σημείο O.	<i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική;

17.Θεώρημα Θαλή στο Χώρο (Γ7.6) Αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή στο χώρο.	17.1 Αναφέρουν και αποδεικνύουν το Θεώρημα του Θαλή στο χώρο. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Παράλληλα επίπεδα ✓ Σχετικές θέσεις ευθείας - επιπέδου ✓ Θεώρημα Θαλή στο επίπεδο Νέες Έννοιες ✓ Θεώρημα Θαλή στο χώρο	Παράδειγμα: Θεώρημα Θαλή στο χώρο • Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα του Θαλή στο χώρο.	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό <i>Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, τα A, B, Γ και Δ είναι κορυφές τετραέδρου.  Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα εμβαδά των τεσσάρων σκιασμένων τριγώνων του πιο πάνω σχήματος; <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Υπάρχει κάποιος μαθηματικός κανόνας για την εύρεση της σχέσης αυτής; • Σε τι προβλέψεις ή γενικεύσεις μπορεί να οδηγήσει αυτή η σχέση;
17.2 Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή στο χώρο στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Θεώρημα Θαλή στο χώρο Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή Θεωρήματος Θαλή στο χώρο στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: Θεώρημα Θαλή στο χώρο • Τρεις ευθείες στο χώρο $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 έχουν ένα κοινό σημείο O και τέμνονται από δύο παράλληλα επίπεδα Π και P στα σημεία A, B, Γ και Δ, E, Z, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. • Τρεις ευθείες στο χώρο $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 έχουν ένα κοινό σημείο O. Παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών AB και $A'B', B\Gamma$ και $B'\Gamma', \Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ είναι συνευθειακά.		
18.Θέσεις Ευθείας – Επιπέδου ως προς Σφαίρα (Γ7.8) Διερευνούν και εφαρμόζουν τις	18.1 Διερευνούν τις θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα.	Παραδείγματα: Θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα • Να αποδείξετε ότι κάθε επίπεδο τομή	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη <i>Χρησιμοποιώ τις θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα, για να κατανοήσω προβλήματα.</i>

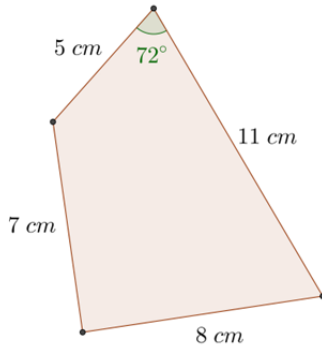
θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα.	Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοιες ευθείας – επιπέδου - σφαίρας Νέες Έννοιες ✓ Σχετικές θέσεις ευθείας ως προς σφαίρα ✓ Σχετικές θέσεις επιπέδου ως προς σφαίρα ✓ Μέγιστος κύκλος – Πόλος – Πολική απόσταση ✓ Σφαιρικό τμήμα	μίας σφαίρας είναι κύκλος. • Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι κάθετη σε μία ακτίνα μιας σφαίρας, στο άκρο της επιφάνειας, είναι εφαπτόμενη στη σφαίρα.	Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται μια σφαίρα. Να κατασκευάσετε μία διάμετρό της.  Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια διαδικασία μπορώ να χρησιμοποιήσω; • Πώς σχετίζεται ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Γ, Δ και Ε με το πρόβλημα; • Ποιες έννοιες - ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στο πρόβλημα αυτό;
	18.2 Εφαρμόζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή των σχετικών θέσεων ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Θέσεις ευθείας και επιπέδου ως προς σφαίρα</i> • Θεωρούμε μια σφαίρα (O, R) και έναν μικρό κύκλο αυτής εμβαδού E. Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των δύο σφαιρικών τμημάτων που σχηματίζονται, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$ • Οι ακτίνες δύο παράλληλων τομών μιας σφαίρας είναι a και β και η απόσταση των δύο τομών αυτών είναι δ. Να υπολογίσετε την ακτίνα της σφαίρας. • Να αποδείξετε ότι από τρία σημεία A, B και Γ της επιφάνειας μιας σφαίρας διέρχεται ένας και μόνος κύκλος.	

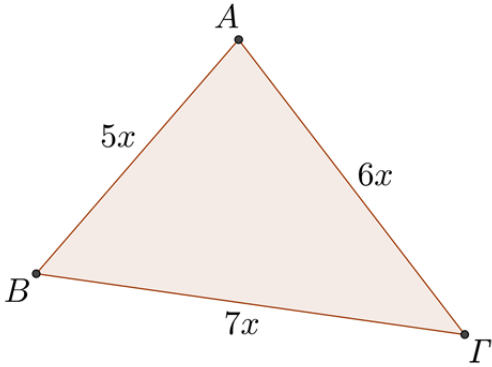
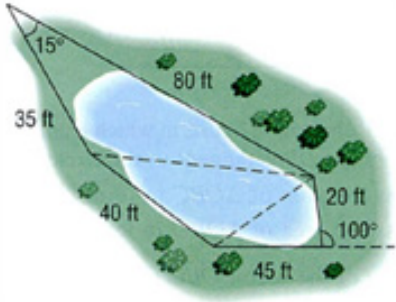
ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΤΡΗΣΗ)

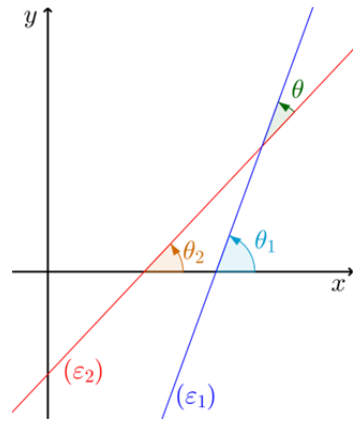
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

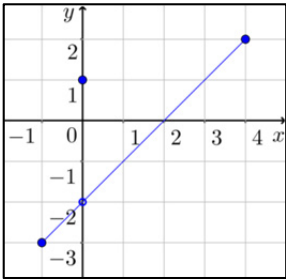
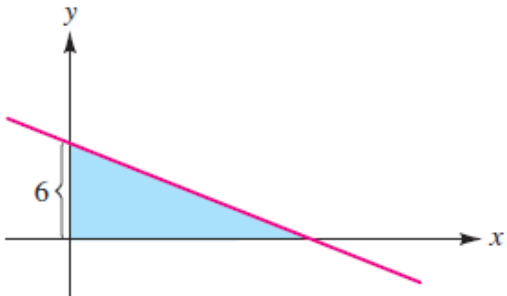
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
1. Επίλυση προβλήματος με τη χρήση λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης (M7.7**) Επιλύουν ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής (με τη χρήση αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων).	1.1 Επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής με τη χρήση λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λογαριθμική – Εκθετική συνάρτηση Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Επίλυση προβλήματος με τη χρήση λογαριθμικής – εκθετικής συνάρτησης</i> Ο ρυθμός με τον οποίο μια επαναφορτιζόμενη μπαταρία φορτίζεται μειώνεται όσο η μπαταρία προσεγγίζει τη μέγιστη φόρτισή της C_0. Ο χρόνος (σε ώρες) που απαιτείται για να αποφορτιστεί μία μπαταρία στην τιμή C, δίνεται από τον τύπο $t = -k \cdot \ln \left(1 - \frac{C}{C_0} \right),$ όπου k μία θετική σταθερά, η οποία εξαρτάται από τον τύπο της μπαταρίας. Για μια συγκεκριμένη μπαταρία, ισχύει $k = 0,25$. Αν αυτή η μπαταρία είναι πλήρως αποφορτισμένη, πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει στο 90% της μέγιστης φόρτισής της C_0;	

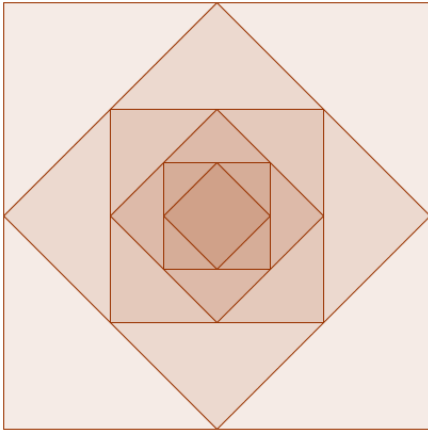
** Η αναφορά στην αρίθμηση των Δεικτών Επιτυχίας (π.χ. M7.7) γίνεται με βάση το Εκτενές Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών που βρίσκεται αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://econtent.schools.ac.cy/mesi/mathimatika/analytika_programmata/ektenes_programma_mathimatika.pdf.

		- Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους πουλιών περιορίζεται από τον τύπο του οικοτόπου, στον οποίο τα πουλιά αυτά φτιάχνουν τις φωλιές τους. Ο πληθυσμός τους συμπεριφέρεται σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης $n(t) = \frac{5600}{0,5 + 27,5e^{-0,044t}}$ όπου t ο χρόνος (σε χρόνια). (α) Να υπολογίσετε τον αρχικό πληθυσμό των πουλιών. (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης n. (γ) Ποια τιμή προσεγγίζει ο πληθυσμός των πουλιών καθώς ο χρόνος αυξάνεται;	(α) Να υπολογίσετε τον πληθυσμό των ψαριών μετά την παρέλευση 3 χρόνων. (β) Ύστερα από πόσα χρόνια ο πληθυσμός των ψαριών της λίμνης θα ισούται με 5000;  Απαντώ στις ερωτήσεις: - Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; - Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; - Είναι η απάντησή μου λογική; - Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
2. Επίλυση προβλήματος εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από την τριγωνομετρία (M6.2) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα μετρικών σχέσεων και εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία, την αναλυτική γεωμετρία και το διανυσματικό λογισμό.	2.1 Επιλύουν προβλήματα εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο με τη χρήση τύπων από την τριγωνομετρία. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Νόμος Ημιτόνων - Συνημιτόνων Νέες έννοιες ✓ Τύποι εμβαδού τριγώνου από την τριγωνομετρία ➤ $E = \frac{1}{2} ab \eta \mu \Gamma$ ➤ $E = \frac{1}{2} a \gamma \eta \mu B$	Παραδείγματα: <i>Εμβαδόν σε τυχαίο τρίγωνο</i> Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω τετραπλεύρου. 	ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη Χρησιμοποιώ την έννοια των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας και των τύπων υπολογισμού του εμβαδού σε τυχαίο τρίγωνο, για να κατανοήσω προβλήματα. Παράδειγμα: Ένας ερευνητής θέλει να προσεγγίσει το εμβαδόν της επιφάνειας μίας λίμνης. Περπατά περιμετρικά στη λίμνη και παίρνει διάφορες μετρήσεις, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα όργανα. Οι μετρήσεις αυτές παρουσιάζονται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση, το εμβαδόν της επιφάνειας της λίμνης αυτής.

	➤ $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A$ ➤ $E = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$, όπου $\tau = \frac{1}{2}(a + \beta + \gamma)$	• Το εμβαδόν του πιο κάτω τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $54\sqrt{6} \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του. 	 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες έννοιες - ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στο πρόβλημα; • Πώς σχετίζεται το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων, που εμφανίζονται στο πιο πάνω σχήμα, με το εμβαδόν της επιφάνειας της λίμνης;
3. Επίλυση προβλήματος με τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών (M6.3) Εφαρμόζουν και επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών.	3.1 Επιλύουν προβλήματα, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος – διαφοράς δύο γωνιών Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος – διαφοράς δύο γωνιών στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος – διαφοράς δύο γωνιών</i> • Να υπολογίσετε τα πιο κάτω, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής: (α) $\sin 75^\circ$ (β) $\eta \mu \frac{\pi}{12}$ (γ) $\epsilon \varphi \frac{19\pi}{12}$ (δ) $\eta \mu 80^\circ \sin 20^\circ - \sin 80^\circ \eta \mu 20^\circ$ (ε) $\frac{\epsilon \varphi 40^\circ - \epsilon \varphi 10^\circ}{1 + \epsilon \varphi 40^\circ \epsilon \varphi 10^\circ}$ • Αν $\eta \mu \theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, να υπολογίσετε τα πιο κάτω: (α) $\eta \mu(a + \beta)$ (β) $\sin(a + \beta)$ (γ) $\epsilon \varphi(a - \beta)$ (δ) $\sigma \varphi(a + \beta)$	ΜΠ.6 Ακρίβεια Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος. Παράδειγμα: Έστω (ϵ_1) και (ϵ_2) δύο τεμνόμενες ευθείες που δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των τεταγμένων και $\hat{\theta} = \gamma \omega \nu(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Να αποδείξετε ότι $\epsilon \varphi \theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2},$ όπου λ_1, λ_2 οι κλίσεις των ευθειών $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$, αντίστοιχα.

		• Αν $\varepsilon\varphi\theta = x + 1$ και $\varepsilon\varphi\varphi = x - 1$, να δείξετε ότι: $2\sigma\varphi(\theta - \varphi) = x^2$	 Απαντώ στην ερώτηση: • Ποια μαθηματική ορολογία θα χρησιμοποιήσω, για να εξηγήσω στους άλλους τον τρόπο απόδειξης της πιο πάνω σχέσης;
4. Θεώρημα Bolzano (M8.3) Αναφέρουν, ερμηνεύουν γεωμετρικά και εφαρμόζουν το θεώρημα του Bolzano.	4.1 Ερμηνεύουν το θεώρημα Bolzano γεωμετρικά και το εφαρμόζουν στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Λύση εξίσωσης ✓ Συνέχεια συνάρτησης ✓ Θεώρημα Bolzano Νέες Έννοιες ✓ Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano ✓ Εφαρμογή θεωρήματος Bolzano στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Θεώρημα Bolzano</i> • Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης f, η οποία να πληρεί τις πιο κάτω προϋποθέσεις: ➤ Είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $[a, \beta]$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$. ➤ $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ ➤ Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις στο $[a, \beta]$. • Ένας δρομέας, ο οποίος χρονομετρείται με χρονόμετρο χειρός, καλύπτει μian απόσταση 100 m σε 10 sec. Το χρονόμετρο μηδενίζεται και ο δρομέας χρονομετρείται ξανά, καθώς επιστρέφει, τρέχοντας χαλαρά προς την αφετηρία. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της διαδρομής, στο οποίο η ένδειξη του χρονόμετρου ήταν η ίδια και στις δύο	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες. Παράδειγμα: Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ Να εξηγήσετε γιατί δεν ισχύει το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 4]$.

		διαδρομές. • Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x^2 - 2x = 1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[-1, 1]$. • Γνωρίζοντας ότι ο αριθμός $\sqrt{5}$ είναι μία λύση της εξίσωσης $x^2 - 5 = 0$, να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{5}$ με ακρίβεια το πολύ 5 χιλιοστών.	 Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποιες πληροφορίες αντλώ από την συγκεκριμένη γραφική παράσταση; • Σε τι με διευκολύνει η γραφική παράσταση;
5. Σχέση συντελεστή κατεύθυνσης ευθείας – ρυθμού μεταβολής (Μ6.10) Υπολογίζουν το συντελεστή κατεύθυνσης (κλίση) ευθείας και επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας ευθείας και του ρυθμού μεταβολής.	5.1 Επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης ευθείας και του ρυθμού μεταβολής. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κλίση ευθείας ✓ Ρυθμός μεταβολής Νέες Έννοιες ✓ Σχέση κλίσης ευθείας και ρυθμού μεταβολής	Παραδείγματα: <i>Κλίση ευθείας – Ρυθμός μεταβολής</i> • Δίνονται τα σημεία $A\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(6, 4)$. Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ είναι ορθή. • Η τεταγμένη του σημείου τομής της πιο κάτω ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι 6. Να βρείτε την κλίση της ευθείας, αν το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου είναι 72 τετραγωνικές μονάδες. 	ΜΠ.4 Μοντελοποίηση Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα, για να ερμηνεύσω ένα πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα. Παράδειγμα: Το μηνιαίο κόστος οδήγησης ενός αυτοκινήτου εξαρτάται γραμμικά από την απόσταση που καλύπτει το αυτοκίνητο. Ο Γιάννης παρατήρησε ότι τον μήνα Μάιο ξόδεψε €200 για 2400 km και τον μήνα Ιούνιο €150 για 1800 km. (α) Να βρεθεί η εξίσωση που συνδέει γραμμικά το μηνιαίο κόστος (K) οδήγησης του αυτοκινήτου με την απόσταση (d) που διανύεται. (β) Τι αντιπροσωπεύει η κλίση της ευθείας που βρήκατε; Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια στρατηγική μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να λύσω το πρόβλημα;

			• Πώς μπορεί η κατασκευή μίας γραφικής παράστασης να με βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος;
6. Επίλυση προβλήματος στις προόδους (Μ6.6) Επιλύουν προβλήματα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.	6.1 Χρησιμοποιούν αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους στην επίλυση προβλήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Έννοια ακολουθίας ✓ Έννοια αριθμητικής – γεωμετρικής προόδου Νέες Έννοιες ✓ Εφαρμογή των εννοιών αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου στην επίλυση προβλήματος	Παραδείγματα: <i>Αριθμητική – Γεωμετρική πρόοδος</i> • Να μοιράσετε δέκα φέτες ψωμί σε δέκα ανθρώπους, έτσι ώστε ο δεύτερος να πάρει $\frac{1}{8}$ της φέτας περισσότερο από τον πρώτο, ο τρίτος να πάρει $\frac{1}{8}$ της φέτας περισσότερο από το δεύτερο κοκ.  • Ένας Η/Υ έλυσε κάποια προβλήματα. Οι χρόνοι που χρειάστηκε ο Η/Υ για να λύσει το κάθε πρόβλημα αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου. Αν ο Η/Υ χρειάστηκε 63,5 λεπτά, για να λύσει όλα τα προβλήματα εκτός από το πρώτο, 127 λεπτά να λύσει όλα τα προβλήματα, εκτός από το τελευταίο και 31,5 λεπτά, για να λύσει όλα τα προβλήματα εκτός από τα δύο πρώτα, να βρείτε πόσα προβλήματα κατάφερε να λύσει ο συγκεκριμένος Η/Υ.	ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό <i>Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά 6 cm. Καθένα από τα υπόλοιπα τετράγωνα σχηματίζεται από την ένωση των μέσων των πλευρών κάθε «προηγούμενου» τετραγώνου. Ποια είναι η περίμετρος του 9^{ου} στη σειρά τετραγώνου;  <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Υπάρχει μαθηματικός κανόνας που συνδέει την περίμετρο ενός τετραγώνου με την περίμετρο του αμέσως «προηγούμενου» τετραγώνου; • Σε τι προβλέψεις ή γενικεύσεις μπορεί να οδηγήσει αυτός ο μαθηματικός κανόνας;

7. Υπολογισμός στοιχείων κανονικού πολυγώνου (M7.6) Ορίζουν την έννοια του κανονικού πολυγώνου και υπολογίζουν την κεντρική γωνία, τη γωνία, την πλευρά, το απόστημα, την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου ή της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου.	7.1 Υπολογίζουν τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου ή του εγγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Ορισμός κανονικού πολυγώνου ✓ Στοιχεία κανονικού πολυγώνου Νέες Έννοιες ✓ Υπολογισμός στοιχείων κανονικού πολυγώνου	Παραδείγματα: <i>Υπολογισμός στοιχείων κανονικού πολυγώνου</i> • Να βρείτε το μέτρο της κεντρικής γωνίας ενός κανονικού οκταγώνου. • Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου, το οποίο έχει μέτρο γωνίας 108°. • Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι $8\sqrt{2} \text{ m}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. • Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 50 cm^2. Να υπολογίσετε το απόστημά του.	ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων. <i>Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.</i> Παράδειγμα: Δύο κανονικά εξάγωνα είναι εγγεγραμμένα σε διαφορετικούς κύκλους. Ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων είναι 2. <i>Εικασία:</i> Ο λόγος των περιμέτρων των δύο εξαγώνων είναι 2 και ο λόγος των εμβαδών των δύο εξαγώνων είναι 4. <i>Απαντώ στις ερωτήσεις:</i> • Πώς θα ελέγξουμε αρχικά, αν η εικασία αληθεύει; • Πώς μπορούμε να αποδείξουμε την πιο πάνω εικασία;
8. Υπολογισμοί στον κύκλο (M7.3) Προσεγγίζουν το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου με κανονικά πολύγωνα και αποδεικνύουν τους τύπους υπολογισμού μήκους και εμβαδού κύκλου, εμβαδού κυκλικού τομέα, κυκλικού τμήματος και υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων.	8.1 Αποδεικνύουν τύπους υπολογισμού μήκους κύκλου, εμβαδού κυκλικού δίσκου, μήκους τόξου, εμβαδού κυκλικού τομέα και εμβαδού κυκλικού τμήματος. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κύκλος ✓ Κανονικά πολύγωνα ✓ Ακολουθίες ✓ Όριο ακολουθίας Νέες Έννοιες ✓ Απόδειξη τύπων μέτρησης κύκλου	Παραδείγματα: <i>Απόδειξη τύπων μέτρησης κύκλου</i> • Να προσεγγίσετε το μήκος κύκλου με τη χρήση κανονικών πολυγώνων και να αποδείξετε το μήκος του είναι $2\pi R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. • Να προσεγγίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με τη χρήση κανονικών πολυγώνων και να αποδείξετε το εμβαδόν του είναι πR^2, όπου R η ακτίνα του κύκλου.	ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων <i>Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.</i> Παράδειγμα: Στο πιο κάτω εφαρμογίδιο δίνεται κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Με τον δρομέα n αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών του κανονικού πολυγώνου. Καθώς το n αυξάνεται, ποια παρατήρηση μπορούμε να κάνουμε για τον τρόπο με τον οποίο τα κανονικά πολύγωνα «προσεγγίζουν» το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού
	8.2 Εφαρμόζουν τύπους υπολογισμού μήκους	Παραδείγματα: <i>Μέτρηση κύκλου</i>	

κύκλου, εμβαδού κυκλικού δίσκου, μήκους τόξου, εμβαδού κυκλικού τομέα και εμβαδού κυκλικού τμήματος στην επίλυση προβλήματος.

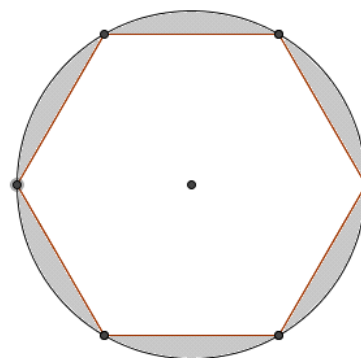
Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- ✓ Κανονικά πολύγωνα
- ✓ Τύποι μέτρησης κύκλου

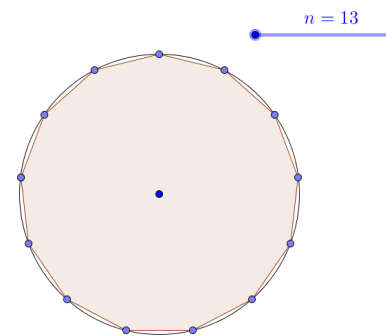
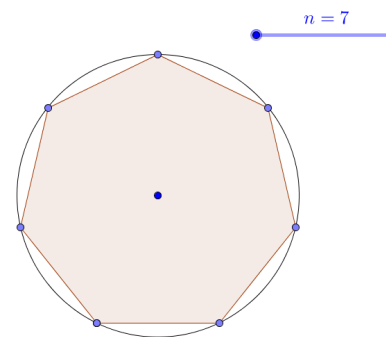
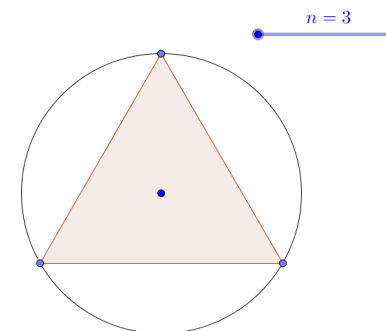
Νέες Έννοιες

- ✓ Εφαρμογή τύπων μέτρησης κύκλου

- Το μήκος ενός κύκλου είναι $14\pi \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα του πιο πάνω κύκλου, του οποίου το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι 45° .
- Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 4 cm , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.



δίσκου;



8.3 Υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

- ✓ Κανονικά πολύγωνα
- ✓ Τύποι μέτρησης κύκλου
- ✓ Τύποι υπολογισμού περιμέτρου και εμβαδού ευθύγραμμων επίπεδων σχημάτων

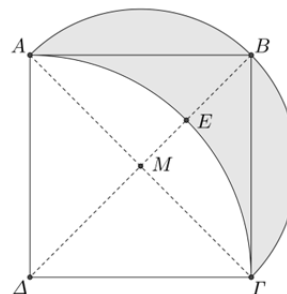
Νέες Έννοιες

- ✓ Εφαρμογή τύπων για τον υπολογισμό εμβαδού και περιμέτρου μεικτόγραμμων επίπεδων

Παραδείγματα:

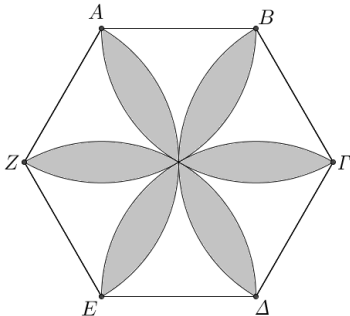
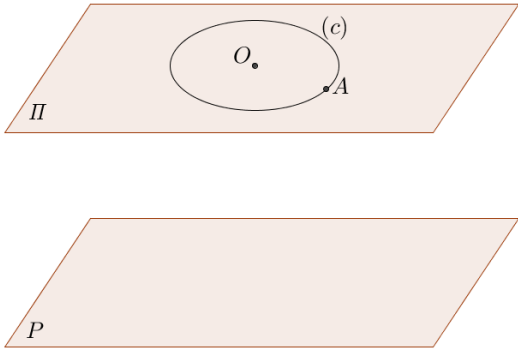
Εμβαδόν – Περίμετρος μεικτόγραμμων επίπεδων σχημάτων

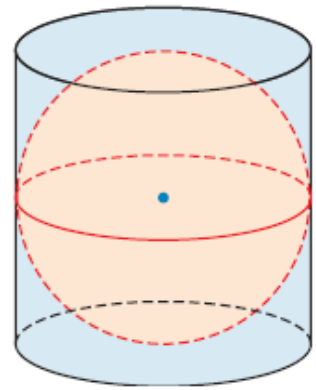
- Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά a . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες πληροφορίες αντλώ από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο;
- Τι μπορεί να μου δείξει το εφαρμογίδιο, που δεν θα μπορούσα να το δω εύκολα;

	σημάτων	Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κανονικό εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ με $AB = 5\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου. 	
9. Υπολογισμοί στα στερεά εκ περιστροφής (Μ7.4) Ορίζουν τα στερεά εκ περιστροφής και τα στοιχεία τους, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους τύπους υπολογισμού της επιφάνειας και του όγκου τους (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα).	9.1 Ορίζουν τα στερεά εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα) και τα στοιχεία τους. Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Κύκλος ✓ Παράλληλα επίπεδα ✓ Προβολή σημείου σε επίπεδο ✓ Απόσταση σημείων στο χώρο ✓ Απόσταση παράλληλων επιπέδων ✓ Απόσταση σημείου από επίπεδο ✓ Αξονική συμμετρία Νέες Έννοιες ✓ Ορισμός στερεών (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα) ως στερεά που	Παράδειγμα: Ορισμός στερεών εκ περιστροφής Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται τα παράλληλα επίπεδα Π, P και ο κύκλος $c(O, R)$, ο οποίος ανήκει στο επίπεδο Π. Να προβάλετε τα σημεία O και A στο επίπεδο P και να ονομάσετε τις προβολές τους με O' και A', αντίστοιχα. Ποιο στερεό παράγεται, αν περιστρέψουμε πλήρως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OO'A'A$ γύρω από τον άξονα OO'; 	ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος Κατανοώ τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και σκέφτομαι πώς θα το επιλύσω. Ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου (κάνω επαλήθευση και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι λογική και δικαιολογημένη). Παράδειγμα: Στην πιο κάτω εικόνα, παρουσιάζεται μία αυτόματη μηχανή για παροχή φαγητού σε ζώα. Η μηχανή αυτή αποτελείται από έναν ορθό κύλινδρο με ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 20 cm και έναν ορθό κώνο ίσης ακτίνας με τον κύλινδρο και ύψους 5 cm. (α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ποσότητα τροφής (σε cm^3) που μπορεί να τοποθετηθεί στην μηχανή αυτή. (β) Για πόσες μέρες θα έχει τροφή ο γάτος, αν καταναλώνει 20 cm^3 τροφής ανά ημέρα (χωρίς να ξαναγεμίσουμε τη μηχανή);

	προκύπτουν από την πλήρη περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από άξονα		
	9.2 Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τους τύπους υπολογισμού της επιφάνειας και του όγκου στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα). Προαπαιτούμενες γνώσεις: ✓ Τύποι υπολογισμού της επιφάνειας και του όγκου στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα) Νέες Έννοιες ✓ Απόδειξη τύπων υπολογισμού της επιφάνειας και του όγκου στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα) και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος	Παράδειγμα: Όγκος – Επιφάνεια στερεών εκ περιστροφής • Μία σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε ένα ορθό κύλινδρο, του οποίου το ύψος και η διάμετρος έχουν το ίδιο μήκος. (α) Να υπολογίσετε το λόγο της επιφάνειας του κυλίνδρου προς την επιφάνεια της σφαίρας. (β) Να υπολογίσετε το λόγο του όγκου του κυλίνδρου προς τον όγκο της σφαίρας. 	Απαντώ στις ερωτήσεις: • Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος; • Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω, για να το λύσω; • Είναι η απάντησή μου λογική; • Πώς ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου;
10.Υπολογισμοί στα στερεά εκ περιστροφής (Μ7.5) Διερευνούν και εφαρμόζουν την πλήρη περιστροφή τριγώνου γύρω από άξονα και υπολογίζουν τους τύπους για την επιφάνεια και τον	10.1 Εφαρμόζουν την πλήρη περιστροφή τριγώνου γύρω από άξονα σε προβλήματα υπολογισμού επιφάνειας και όγκου του παραγόμενου στερεού.	Παράδειγμα: Όγκος – Επιφάνεια στερεών εκ περιστροφής • Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο κάτω σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα $y'y$.	ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών Εφαρμόζω γενικούς κανόνες, για να λύσω πιο σύνθετα προβλήματα. Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, το $ABΓ$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με $AB = BΓ = AΓ = 6\text{ cm}$, το $ΓΔΕΖ$ είναι τετράγωνο και $AZ = 2\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της

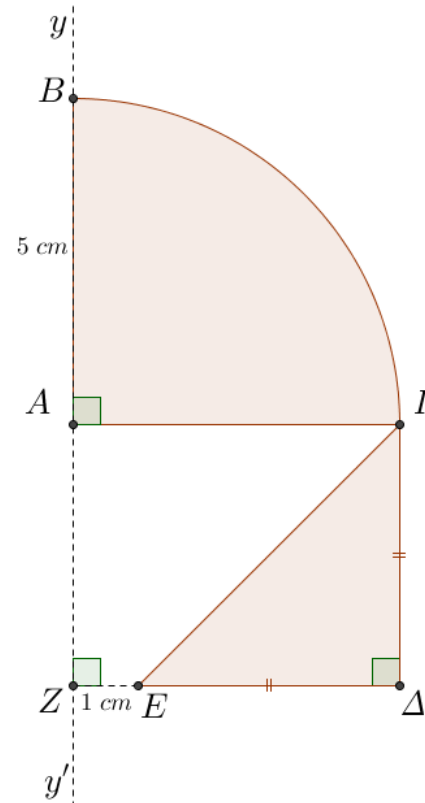
όγκο του στερεού που παράγεται.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

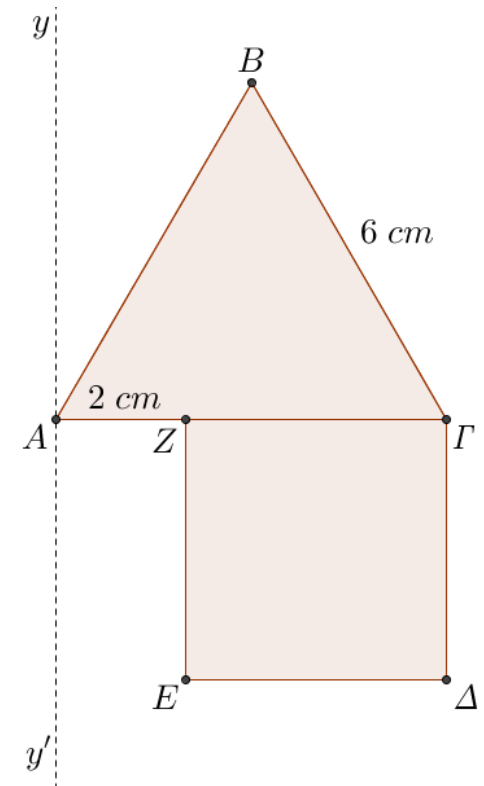
- ✓ Ορισμός – Στοιχεία στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα)
- ✓ Τύποι υπολογισμού επιφάνειας και όγκου στερεών εκ περιστροφής (κύλινδρος, κώνος, κόλουρος κώνος, σφαίρα)

Νέες Έννοιες

- ✓ Εφαρμογή πλήρους περιστροφής τριγώνου γύρω από άξονα στην επίλυση προβλήματος



επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα $y'y'$.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;
- Ποια μέρη του προβλήματος μπορούν να απλοποιηθούν;