ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Α΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Δείκτες Επιτυχίας

- **Α3.2 Κατανοούν την έννοια της μεταβλητής, ερμηνεύουν και επεξηγούν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών.**
- **Α4.13 Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα.**
- **Α4.14 Επιλύουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας.**
- **Α4.10 Κατανοούν και εφαρμόζουν**

Δείκτες Επάρκειας

Επίπεδα Δραστηριοτήτων

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

- ✓ Ιδιότητες Πράξεων:
  - ➢ Αντιμεταθετική και προσεταιριστική πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, επιμεριστική πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση-αφαίρεση, ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης-πολλαπλασιασμού
- ✓ Προτεραιότητα πράξεων

Νέες Έννοιες:

- ✓ **Μεταβλητή** ονομάζουμε το γράμμα ή το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε ποσότητες που μεταβάλλονται, π.χ. x, y, α.
- ✓ **Αλγεβρική παράσταση** είναι μία μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές, π.χ. $2x + 5$.

Μαθηματικές Πρακτικές

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.

(α) Βάζω αριθμούς σε ένα πλαίσιο (σενάριο) και
(β) αφαιρώ (αποπλαισιώνω) τους αριθμούς και τις μεταβλητές από το πλαίσιο (ιστορία) και εργάζομαι μαθηματικά.

Παράδειγμα: Ο μισθός μου αυξήθηκε κατά €50. Ο Ανδρέας παίρνει διπλάσιο μισθό από μένα. Να αναπαραστήσεις τις πιο πάνω δηλώσεις με συμβολικές εκφράσεις.

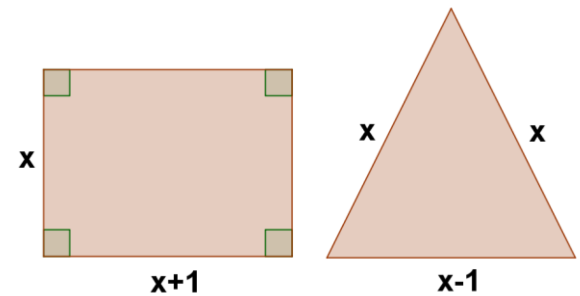
Αποπλαισιοποίηση μεταβλητών και αριθμών

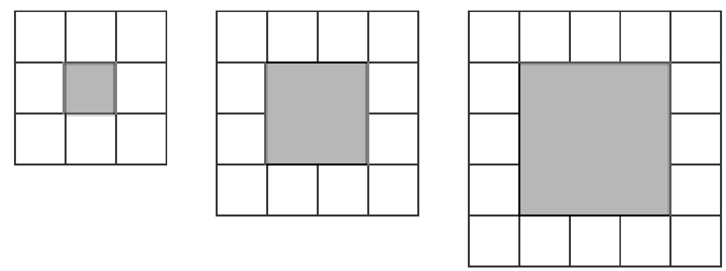
Παίρνω από το κείμενο τις μεταβλητές και τους αριθμούς και εργάζομαι σε μαθηματικό πλαίσιο, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

Αρχικός Μισθός	x
Αύξηση κατά €50	$x + 50$
Μισθός Ανδρέα	$2 \cdot (x + 50)$

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Πώς συσχετίζω φράσεις-κλειδιά, όπως «αύξηση κατά 50» ή «διπλάσιος μισθός», με τις αντίστοιχες πράξεις;*

αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «παράσταση». • **Α4.11 Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.** • **Α4.12 Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και**	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής και της αλγεβρικής παράστασης σε μαθηματικές προτάσεις ή προβλήματα • να μετασχηματίζουν ισοδύναμες αλγεβρικές παραστάσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πράξεων • να αναγνωρίζουν τις μεταβλητές σε δεδομένες αλγεβρικές παραστάσεις και να επεξηγούν το νόημά τους • να μεταφράζουν συμβολικές εκφράσεις σε λεκτικές και αντίστροφα • να αντιστοιχούν εξισώσεις με προβλήματα και να αιτιολογούν την απάντησή τους • να γράφουν εκφώνηση προβλήματος που αντιστοιχεί σε δεδομένη εξίσωση • να χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού, αναφέροντας τη χρήση των ιδιοτήτων των ισοτήτων	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παραδείγματα:** • Σήμερα, ο Κώστας έχει τετραπλάσια ηλικία από τον Γιάννη. Ύστερα από 6 χρόνια, η ηλικία του Κώστα θα είναι διπλάσια της ηλικίας του Γιάννη. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες; • Να υπολογίσετε την τιμή του x, αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι κατά 10 μονάδες μεγαλύτερη από την περίμετρο του τριγώνου.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;* • *Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;* • *Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω;* • *Ποιες προαπαιτούμενες γνώσεις χρειάζομαι;* • *Είναι η απάντησή μου λογική;* • *Πώς αξιολογώ την απάντησή μου;*

γραφικά, χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων. • **Α4.15 Επεξηγούν την προτεραιότητα και τις ιδιότητες των πράξεων αλγεβρικά και γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν, για να απλοποιούν παραστάσεις με ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.**	**Παράδειγμα: Έννοια της μεταβλητής** • Στο κιβώτιο A υπάρχουν τριπλάσιοι βόλοι σε σχέση με το κιβώτιο B. Συμβολίζουμε με x το πλήθος των βόλων στο κιβώτιο B. Να ελέγξετε αν η πιο κάτω πρόταση είναι ορθή: «Το πλήθος των βόλων στο κιβώτιο A είναι $3+x$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας». **Παραδείγματα: Μετάφραση συμβολικών εκφράσεων σε λεκτικές και αντίστροφα** • Στην παράσταση $2x+3y-5$, οι μεταβλητές x και y αντιπροσωπεύουν δύο πραγματικούς αριθμούς, ενώ η παράσταση $2x+3y-5$ αντιπροσωπεύει το άθροισμα του διπλάσιου του ενός αριθμού με το τριπλάσιο του άλλου, μειωμένο κατά 5. • Δίνεται η παράσταση $B=x+5$. Ο Αντώνης έχει €x. Αν του δώσω ακόμη 5 ευρώ, πόσα θα έχει συνολικά; **Παράδειγμα: Αντιστοίχιση εξίσωσης με πρόβλημα** • Ποια εξίσωση δίνει το μήκος ενός ορθογωνίου που έχει πλάτος $7\ cm$ και περίμετρο $36\ cm$; Α. $7+x=36$, Β. $14+x=36$, Γ. $14+2x=36$	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα, κτλ.), για να αναπαραστήσω καταστάσεις της καθημερινής ζωής.* **Παράδειγμα**: Μια εταιρεία διακόσμησης κήπων κατασκευάζει κήπους τετράγωνου σχήματος που περιτριγυρίζονται από τετράγωνες πλάκες, όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα. Με βάση τα πιο κάτω σχήματα, να βρείτε ποια είναι η σχέση μεταξύ της πλευράς του κήπου (που είναι η σκιασμένη επιφάνεια σε κάθε σχήμα) και του αριθμού των τετράγωνων πλακών.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς θα αναπαραστήσω το πλήθος των τετράγωνων πλακών που περιτριγυρίζουν τον τετράγωνο κήπο, χρησιμοποιώντας μεταβλητές;*

Παράδειγμα: Γραφή προβλήματος που επιλύεται με δοσμένη εξίσωση

Εξίσωση: $x + 7 = 2x - 3$

Πρόβλημα: Ποιος αριθμός αυξημένος κατά 7 ισούται με το διπλάσιό του μειωμένο κατά 3;

Παραδείγματα: Ισοδυναμία αλγεβρικών παραστάσεων

- Να διερευνούν με διάφορους τρόπους κατά πόσο οι παραστάσεις $3 \cdot (5a + 3) - 4$ και $15a + 9$ είναι ισοδύναμες, δικαιολογώντας την απάντησή τους.
- Να μεταφράζουν σε γραπτό λόγο εξισώσεις, όπως η $k + 0{,}25 \cdot k = 1{,}25 \cdot k$

«Η αύξηση του k κατά 25 % είναι ισοδύναμη με το γινόμενο $1{,}25 \cdot k$».

Παράδειγμα: Επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού με τη χρήση ιδιοτήτων των ισοτήτων

- Ιδιότητα Διαγραφής

$x + 13 = 15 \Leftrightarrow x + 13 = 2 + 13$

$\Leftrightarrow x = 2$

$3x + 10 = 5x + 2$

$\Leftrightarrow 3x - 5x = +2 - 10$

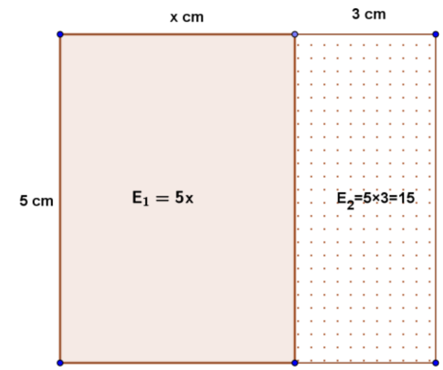
$$\Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x = 4$$

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

Οργανώνω τους αριθμούς και τις μεταβλητές, ώστε να χειρίζομαι με ευελιξία τα μαθηματικά.

Π. χ. Εφαρμόζω γενικούς κανόνες πράξεων (π.χ. επιμεριστική ιδιότητα, ιδιότητα διαγραφής), για να σχηματίσω ισοδύναμες παραστάσεις ή να επιλύσω εξισώσεις.

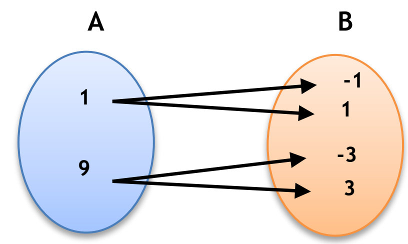
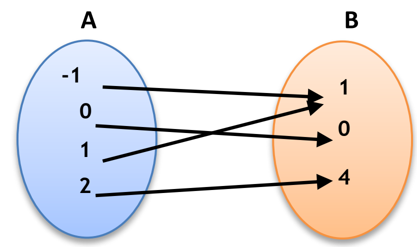
Παράδειγμα: Να αναπτύξετε το γινόμενο $5 \cdot (x + 3)$.

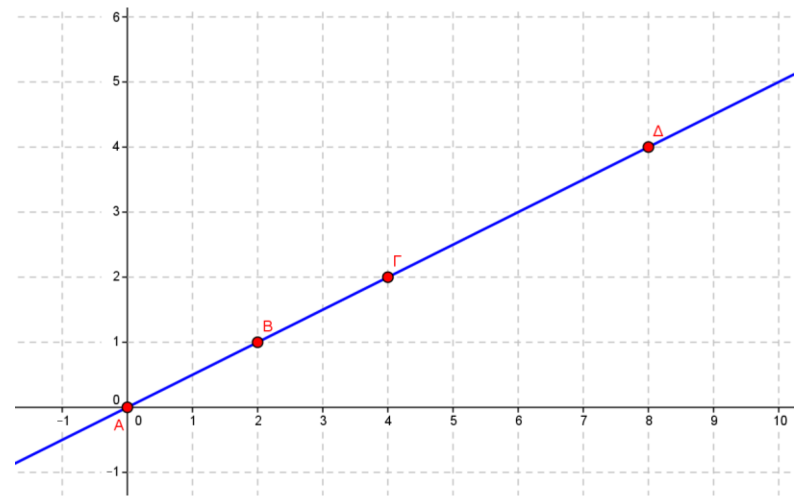


$$5 \cdot (x + 3) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 5x + 15$$

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Με ποιο τρόπο μπορώ να συνδέσω το γινόμενο $5 \cdot (x + 3)$ με το γεωμετρικό μοντέλο;*
- *Ποιες ιδιότητες των πράξεων χρησιμοποιώ, για να υπολογίσω το γινόμενο;*
- *Τι εκφράζουν γεωμετρικά τα δύο ίσα μέλη της ταυτότητας;*

• **Α4.4 Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο πεδίο τιμών και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.** • **Α4.5 Δημιουργούν και συμπληρώνουν πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο μιας συνάρτησης.** • **Α3.6 Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν το γενικό τύπο**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ *Διάταξη Ρητών Αριθμών* ✓ *Ορθογώνιο Σύστημα Αξόνων* ✓ *Προσδιορισμός Θέσης Σημείου στο Επίπεδο* **Νέες Έννοιες:** • **Αντιστοιχία** λέγεται μια σχέση (κανόνας) που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου A (σύνολο εισόδου) με τα στοιχεία ενός συνόλου B (σύνολο εξόδου). • **Συνάρτηση** λέγεται η ειδική περίπτωση αντιστοιχίας, στην οποία σε κάθε στοιχείο του συνόλου εισόδου A αντιστοιχεί μόνο ένα στοιχείο του συνόλου εξόδου B. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης και τη διαδικασία αντιστοίχισης, στην οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου εισόδου αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα στοιχείο y του συνόλου εξόδου. Δίνεται έμφαση στην κατανόηση των ορισμών των δύο αυτών εννοιών. Δηλαδή, οι μαθητές αντιλαμβάνονται κατά πόσο μια αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση και αναφέρουν το σύνολο εισόδου και το σύνολο εξόδου	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* ***Παράδειγμα:*** *Ποια από τα πιο κάτω διαγράμματα αναπαριστούν συνάρτηση;*   *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια διαδικασία ακολουθώ για να εξετάσω πότε μια αναπαράσταση ορίζει συνάρτηση ή όχι;* • *Γιατί το πρώτο διάγραμμα δεν αναπαριστά συνάρτηση;*

συναρτήσεων. • **Α4.6 Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, με ή χωρίς τεχνολογία, σχεδιάζοντας σημεία σε σύστημα αξόνων.** • **Α4.7 Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και ελέγχουν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο**	• να παρουσιάζουν πολλαπλές αναπαραστάσεις για την έννοια της συνάρτησης με τη συμπλήρωση πίνακα τιμών ή βελοδιαγράμματος, όταν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης και αντίστροφα • να παρουσιάζουν πολλαπλές αναπαραστάσεις για την έννοια της συνάρτησης τοποθετώντας σημεία που αντιστοιχούν σε διατεταγμένα ζεύγη (x, y) σε σύστημα αξόνων και κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης • να μελετούν και να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Δίνεται έμφαση στην εύρεση του συνόλου εισόδου και του συνόλου εξόδου, προβάλλοντας τη γραφική παράσταση στον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων, και στην άντληση πληροφοριών μέσα από την γραφική παράσταση συνάρτησης **Παράδειγμα: Έννοια συνάρτησης** • Να εξετάσετε κατά πόσο ο πιο κάτω πίνακας τιμών ορίζει συνάρτηση με σύνολο εισόδου τα ονόματα των παιδιών και σύνολο εξόδου τις τιμές του ύψους τους.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Ο Λεωνίδας ισχυρίζεται ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές εισόδου με τις τιμές εξόδου είναι η $y = 2x$. α. Να ελέγξετε κατά πόσο ο Λεωνίδας έχει δώσει την ορθή σχέση. β. Αν διαφωνείτε, να αντικρούσετε τον ισχυρισμό του και να δώσετε τη δική σας απάντηση.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς ελέγχω την ορθότητα της απάντησης μου;*

ανήκει στην ευθεία.

- **Α4.9 Μοντελοποιούν και περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα τιμών ή σε γραφική παράσταση.**

- **Α5.5 Μελετούν, ερμηνεύουν και εφαρμόζουν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων.**

- **4.1 Επιλύουν προβλήματα βρίσκοντας τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μοτίβα,**

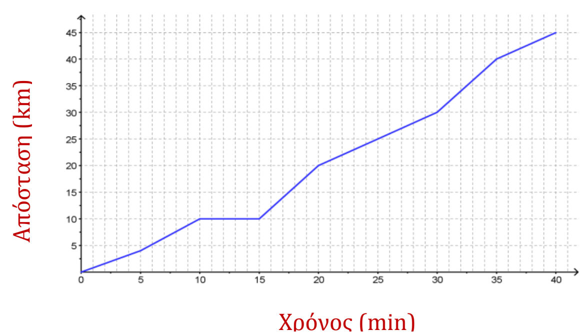
Όνομα Παιδιού	Ύψος Παιδιού (cm)
Τιμή Εισόδου (x)	Τιμή Εξόδου (y)
Ανδρέας	168
Μάριος	174
Ελένη	161
Ζωή	168

Παράδειγμα: Αναπαράσταση συνάρτησης

- Αναπαριστούν τη συνάρτηση με τύπο $y = 2x + 1$ και με σύνολο εισόδου $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ με πίνακα τιμών, με βελοδιάγραμμα και με γραφική παράσταση.

Παράδειγμα: Μελέτη-ερμηνεία γραφικής παράστασης συνάρτησης

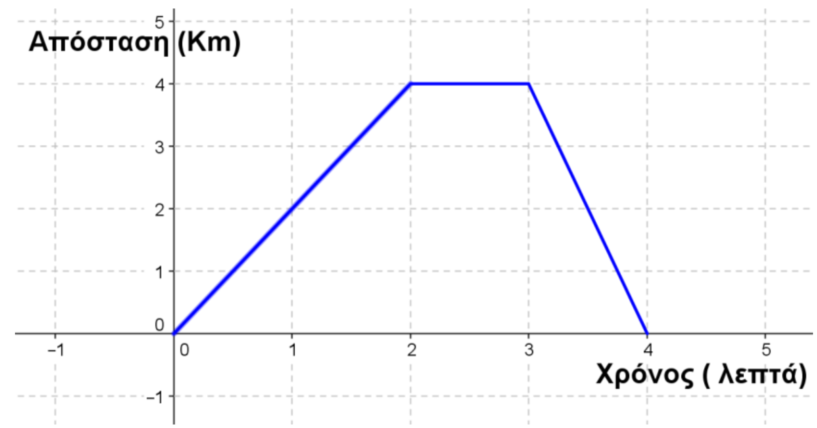
- Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η απόσταση σε (km) που διανύει ένα ποδήλατο σε χρόνο 40 λεπτών.



ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων

Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.

Παράδειγμα: Να χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω γραφική παράσταση για να εξηγήσετε την κίνηση ενός αυτοκινήτου για 4 λεπτά σε σχέση με την απόσταση που έχει διανύσει.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες πληροφορίες μπορώ να αντλήσω από το κάθε τμήμα της γραφικής παράστασης;*
- *Πώς μπορώ να ελέγξω την απάντησή μου, χρησιμοποιώντας κατάλληλο εφαρμογίδιο;*

<table>
<tr>
<td>

περιγράφουν λεκτικά τον κανόνα του μοτίβου και εκφράζουν το νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή.

- **Α4.2 Επεκτείνουν και κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.**
- **Α5.1 Χρησιμοποιούν μοτίβα, καθώς και αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους προς επίλυση προβλημάτων.**

</td>
<td>

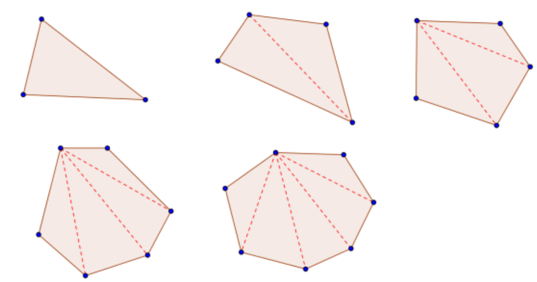
- Σε ποιο χρονικό διάστημα:
  (α) το ποδήλατο παραμένει ακίνητο;
  (β) το ποδήλατο κινείται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα;
- Πόσο χρόνο χρειάζεται το ποδήλατο, για να καλύψει τα πρώτα 20 km της διαδρομής;

</td>
<td>

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς, κάνω γενικεύσεις και βρίσκω σύντομες λύσεις.

Παραδείγματα:
(α) Στο πιο κάτω σχήμα είναι σχεδιασμένα κυρτά πολύγωνα που έχουν από τρεις μέχρι επτά πλευρές.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Πλευρές (ν)	3	4	5	6	7	...
Άθροισμα γωνιών κυρτού πολυγώνου	$180°$					

i. Να περιγράψετε το μοτίβο που παρουσιάζεται στον πιο πάνω πίνακα

ii. Μπορείτε να εκτιμήσετε το άθροισμα των γωνιών για κυρτά πολύγωνα με 8 και 9 πλευρές, χωρίς να τα σχεδιάσετε; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

iii. Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών σε ένα 20-γωνο;

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
iv. Να δώσετε έναν γενικό τύπο για το συνολικό άθροισμα ενός κυρτού πολυγώνου με ν −πλευρές.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

Τι παρατηρώ για τη σχέση που έχει το άθροισμα των γωνιών των πιο πάνω κυρτών πολυγώνων με το πλήθος των πλευρών τους, όταν το πλήθος των πλευρών τους αυξάνεται κατά ένα;
Πώς μπορώ να εκτιμήσω ή να γενικεύσω τις παρατηρήσεις μου, ώστε να οδηγηθώ στη σχέση που συνδέει το πλήθος των πλευρών του κυρτού πολυγώνου με το άθροισμα των γωνιών του;

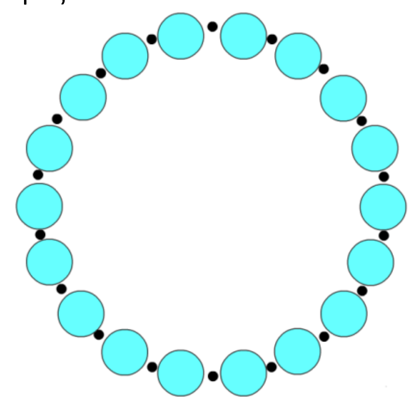
(β) Να συμπληρώσετε τα κενά στον πιο κάτω πίνακα.
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td>4</td><td>7</td><td>…</td><td>10</td><td>…</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>49</td><td>81</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>
Να βρείτε έναν κανόνα αντιστοίχισης, ώστε κάθε x να αντιστοιχεί σε ένα y.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

Τι παρατηρώ για τη σχέση που φαίνεται να συνδέει το x με το y;
Πώς ελέγχω κατά πόσο ισχύει η σχέση αυτή πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ;

</td></tr>
<tr><td>Α4.16 Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας την έννοια του συνόλου, του πληθικού αριθμού, του</td><td></td><td>Οι δείκτες Α4.16 και Α4.17 διδάσκονται ως απαραίτητοι και αποτελούν προϋπόθεση για τη διδασκαλία άλλων εννοιών.</td></tr>
</table>

«ανήκειν», της τομής, της ένωσης και του συμπληρωματι-κού συνόλου. • **Α4.17 Αναπαριστούν και επιλύουν προβλήματα με τη χρήση Βέννειων διαγραμμάτων.**		

ΑΡΙΘΜΟΙ		
Δείκτες Επιτυχίας	**Δείκτες Επάρκειας**	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	**Μαθηματικές Πρακτικές**
• **Αρ4.2 Επεξηγούν την έννοια της δύναμης και της τετραγωνικής ρίζας, υπολογίζουν τις θετικές δυνάμεις ακέραιων αριθμών, εκφράζουν ακέραιους αριθμούς σε μορφή δύναμης και υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα τετράγωνων αριθμών.** • **Αρ5.18 Κάνουν εκτιμήσεις του αποτελέσματος μιας πράξης και ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ *Ιδιότητες Πράξεων:* ➢ *Αντιμεταθετική και προσεταιριστική πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, επιμεριστική πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση-αφαίρεση, ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης-πολλαπλασιασμού* ✓ *Προτεραιότητα πράξεων* **Νέες Έννοιες:** ✓ Το γινόμενο $\underbrace{\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \cdots\ \cdot\alpha}}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$, που αποτελείται από $\boldsymbol{\nu}$ παράγοντες ίσους με $\boldsymbol{\alpha}$, όπου $\nu > 1$, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και ονομάζεται **δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$ στη $\boldsymbol{\nu}$** ή **νιοστή δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$.** Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να υπολογίζουν δυνάμεις αριθμών • να εκφράζουν αριθμούς ως δυνάμεις και αντίστροφα	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Κατανοώ τη σημασία των ποσοτήτων και τις χρησιμοποιώ σε πράξεις. Δίνω προσοχή στη σημασία των ποσοτήτων και όχι μόνο στον υπολογισμό τους.* **Παράδειγμα:** Να συμπληρώσετε τα κενά στον κύκλο με τους αριθμούς $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 28, 30, 34$ έτσι ώστε το άθροισμα κάθε δύο διαδοχικών αριθμών να είναι τετράγωνος αριθμός.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια διαδικασία ακολουθώ για να τοποθετήσω κατάλληλα τους αριθμούς;* • *Ποιες ιδιότητες θα χρησιμοποιήσω για να βρω την απάντηση;*

	Παραδείγματα: Πράξεις με δυνάμεις • Να υπολογίσετε τις δυνάμεις $2^5, \left(\frac{1}{3}\right)^3, (0{,}2)^4$ • Να εκφράσετε τους πιο κάτω αριθμούς ως δυνάμεις: $5 \cdot 5 \cdot 5, x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x, a \cdot a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ • Να συγκρίνετε τις δυνάμεις: 2^3 και 3^2, 4^3 και 3^4, 2^5 και 5^2, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ και $\left(\frac{1}{3}\right)^3$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω με ακρίβεια αριθμητικές απαντήσεις σύμφωνα με τη κατάσταση του προβλήματος.* *Υπολογίζω σωστά και με ακρίβεια.* **Παράδειγμα:** Να υπολογίσετε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $2^6 \cdot 5^9$. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια μαθηματική ορολογία χρησιμοποιώ για να εξηγήσω τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκα;* • *Πώς μπορώ να ελέγξω την απάντησή μου για να δω αν δίνει λύση στο πρόβλημα;*
• **Αρ5.1 Ορίζουν την τέλεια διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς, αναφέρουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια διαιρετότητας.** • **Αρ5.26 Εφαρμόζουν την Ευκλείδεια Διαίρεση στην**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Φυσικοί αριθμοί, διαιρέτες φυσικού αριθμού, πολλαπλάσια φυσικού αριθμού **Νέες Έννοιες:** ✓ **Διαιρέτης ή Παράγοντας**: Ο αριθμός β, $\beta \in \mathbb{N}$ **διαιρεί** τον αριθμό α, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\beta \mid \alpha}$, αν υπάρχει ένας αριθμός $\kappa \in \mathbb{N}_0$, έτσι ώστε να ισχύει: $$\boldsymbol{\alpha = \kappa \cdot \beta}$$ Ο β λέγεται **διαιρέτης ή παράγοντας** του α. Ο α λέγεται **πολλαπλάσιο** του β ($\pi o\lambda.\, \beta$).	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση συλλογισμού** *Αναλύω προβλήματα και χρησιμοποιώ μαθηματικές υποθέσεις, ορισμούς και αποτελέσματα για την ανάπτυξη των ισχυρισμών.* *Αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές ιδέες.* **Παράδειγμα:** Οι 76 μαθητές της Α’ Γυμνασίου ενός σχολείου θα πάνε εκπαιδευτική εκδρομή. Για κάθε 20 παιδιά προβλέπεται ένας καθηγητής ως συνοδός. Πόσοι είναι οι καθηγητές που θα συνοδεύσουν τα παιδιά; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για υπολογίσω την απάντηση;* • *Πώς συνδέεται το πρόβλημα με την Ευκλείδεια διαίρεση;*

<table>
<tr>
<td>

επίλυση προβλημάτων.

- **Αρ4.3 Διατυπώνουν αιτιολογούν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 και 25.**
- **Αρ5.2 Αναφέρουν πότε ένας φυσικός αριθμός είναι πρώτος και εφαρμόζουν το κόσκινο του Ερατοσθένη, για να βρίσκουν τους πρώτους αριθμούς.**
- **Αρ5.7 Αναλύουν ένα σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (κανονική μορφή) και αποδεικνύουν το θεμελιώδες**

</td>
<td>

✓ **Ευκλείδεια Διαίρεση**: Όταν δοθούν δύο αριθμοί Δ, δ, τότε υπάρχουν δύο μοναδικοί αριθμοί π, υ ($\Delta, \pi, \upsilon \in \mathbb{N}_0$ και $\delta \in \mathbb{N}$), έτσι ώστε να ισχύει:

$$\boldsymbol{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon\,,\;\; 0 \leq \upsilon < \delta}$$

Η πιο πάνω διαδικασία λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.

✓ Ιδιότητες Διαιρετών

✓ Κριτήρια Διαιρετότητας

✓ **Πρώτος** αριθμός είναι ένας φυσικός αριθμός διάφορος του 1 που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.

✓ Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του 1 γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής).

✓ **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.

✓ **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές:

- να χρησιμοποιούν τη διαδικασία της Ευκλείδειας διαίρεσης και να αναγνωρίζουν πότε μια διαίρεση

</td>
<td>

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Ερμηνεύω και κατανοώ το πρόβλημα.

Αναλύω τα δεδομένα και καταστρώνω σχέδιο επίλυσης.

Εντοπίζω σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων.

Παράδειγμα: Η Λουκία έφτιαξε ένα κοκτέιλ με χυμούς φρούτων για το πάρτι της. Χρησιμοποίησε 8 μπουκάλια χυμό ανανά, 12 μπουκάλια χυμό μήλου και ορισμένα μπουκάλια χυμό βατόμουρο. Κάθε μπουκάλι με χυμό ανανά περιείχε $350ml$, κάθε μπουκάλι με χυμό μήλο περιείχε $230ml$ και κάθε μπουκάλι με χυμό βατόμουρο περιείχε $125ml$. Με το κοκτέιλ που έφτιαξε υπολόγισε ότι μπορεί να γεμίσει 39 ποτήρια που το καθένα χωράει $165ml$. Πόσα μπουκάλια χυμό βατόμουρο χρησιμοποίησε;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;*
- *Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;*
- *Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω;*
- *Ποιες προηγούμενες γνώσεις χρειάζομαι;*
- *Είναι η απάντησή μου λογική;*

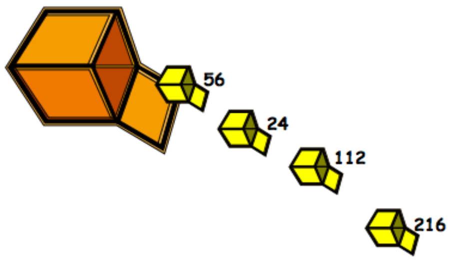
ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς σε μια διαδικασία και κάνω γενικεύσεις.

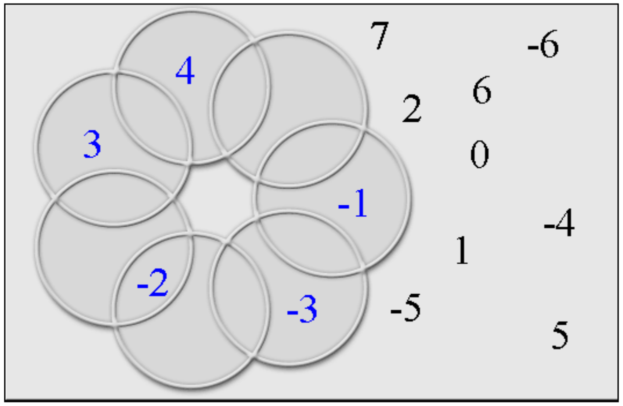
Παράδειγμα: Δίνεται η πιο κάτω διαίρεση. Να γράψετε τα επόμενα τέσσερα ψηφία του πηλίκου της διαίρεσης και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

</td>
</tr>
</table>

θεώρημα της αριθμητικής, ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει μία μοναδική αναπαράσταση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. • **Αρ5.3 Διερευνούν και αποδεικνύουν την εύρεση του ΜΚΔ δύο φυσικών αριθμών με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο και ορίζουν τους σχετικά πρώτους αριθμούς.** • **Αρ5.4 Διερευνούν, ορίζουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές του ΜΚΔ και ΕΚΠ φυσικών αριθμών.** • **Αρ5.27 Διερευνούν**	είναι τέλεια και πότε ατελής • να χρησιμοποιούν τα κριτήρια διαιρετότητας και να κάνουν υπολογισμούς και πράξεις • να υπολογίζουν το ΜΚΔ και το ΕΚΠ και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες τους σε υπολογισμούς • να εφαρμόζουν τις ιδιότητες της διαιρετότητας και την Ευκλείδεια διαίρεση και να επιλύουν προβλήματα **Παράδειγμα: Εφαρμογή της Ευκλείδειας διαίρεσης** • Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το υπόλοιπο μιας διαίρεσης, όταν το πηλίκο είναι 12 και ο διαιρέτης 8. **Παράδειγμα: Εφαρμογή των ιδιοτήτων των διαιρετών και των κριτηρίων διαιρετότητας** • Να ελέγξετε κατά πόσον το άθροισμα των αριθμών $15, 66$ και 42 διαιρείται με το 3 και να δικαιολογήσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους την απάντησή σας. **Παράδειγμα: Πρώτοι Αριθμοί** Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμοί είναι πρώτοι. $2015, 111111, 37, 101$ **Παράδειγμα: Πρόβλημα ΜΚΔ** • Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε αυτή επί έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιο αριθμό πολλαπλασιάστηκαν οι	$$\begin{array}{r\|l} 25{,}0000 & 11 \\ \hline \underline{-22} & 2{,}2727 \\ 30 & \\ \underline{-22} & \\ 80 & \\ \underline{-77} & \\ 30 & \\ \underline{-22} & \\ 80 & \\ \underline{-77} & \\ 30 & \end{array}$$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Υπάρχει μαθηματικός κανόνας με βάση τον οποίο μπορώ να υποστηρίξω την απάντηση μου;* • *Σε τι προβλέψεις ή γενικεύσεις θα με οδηγήσει το μοτίβο που δημιουργείται κατά τον υπολογισμό του πηλίκου της διαίρεσης;*

και εφαρμόζουν έννοιες από τη θεωρία αριθμών (παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών, πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, διαιρετότητα, εύρεση Μ.Κ.Δ. και ΕΚΠ) στην επίλυση προβλημάτων.	τέσσερις αριθμοί.  **Παράδειγμα: Εφαρμογή των κριτηρίων διαιρετότητας και της Ευκλείδειας διαίρεσης** • Να ελέγξετε κατά πόσον ο αριθμός 17 είναι παράγοντας του 3060 και να αναλύσετε τον αριθμό 3060 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.	
• **Αρ5.9 Ορίζουν το σύνολο των ρητών αριθμών, αναγνωρίζουν, συγκρίνουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς και τους αναπαριστούν στην ευθεία των ρητών αριθμών.** • **Αρ5.10 Ορίζουν και εκτελούν πράξεις**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Διάταξη φυσικών αριθμών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Θετικός αριθμός, αρνητικός αριθμός **Νέες Έννοιες:** ✓ **Ακέραιοι αριθμοί** είναι το σύνολο που περιλαμβάνει τους φυσικούς αριθμούς, τους αντίστοιχους αρνητικούς και το μηδέν. ✓ **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος, με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς και παρονομαστή διαφορετικό	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Κατανοώ τη σημασία των μαθηματικών συμβόλων και ονομάζω ποσότητες χρησιμοποιώντας ορθή ορολογία.* *Δίνω με ακρίβεια αριθμητικές απαντήσεις, σύμφωνα με τη κατάσταση του προβλήματος.* *Υπολογίζω ορθά και με ακρίβεια.* **Παράδειγμα:** Να βρείτε τον αριθμό που απέχει εξίσου από το $-3\frac{1}{5}$ και το $-3\frac{2}{5}$. *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς μπορώ να ελέγξω κατά πόσο οι απαντήσεις μου δίνουν λύση σε αυτό το πρόβλημα;*

στο σύνολο των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν ομόσημους, ετερόσημους, αντίθετους και αντίστροφους ρητούς αριθμούς. • **Αρ5.15 Ορίζουν και διερευνούν την έννοια της απόλυτης τιμής ενός ρητού αριθμού.** • **Αρ5.20 Εκτελούν πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων και την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.** • **Αρ4.10 Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα**	από το μηδέν. Το σύνολο των Ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$. ✓ **Απόλυτη τιμή ή μέτρο** ενός αριθμού α είναι η απόσταση του αριθμού από το μηδέν. ✓ Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο, ονομάζονται **ομόσημοι.** ✓ Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο**,** ονομάζονται **ετερόσημοι**. ✓ Πράξεις ρητών αριθμών. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να συγκρίνουν τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς (ομόσημους, ετερόσημους, αντίθετους και αντίστροφους) • να είναι σε θέση να εκτελούν πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών **Παράδειγμα: Σύγκριση ρητών αριθμών** • Να τοποθετήσετε τους αριθμούς $-\|-2\|, 0, \frac{1}{2}, \|-2\|, -2$ στην πιο κάτω αριθμητική γραμμή.  **Παράδειγμα: Πράξεις ρητών αριθμών** • Να διατάξετε τους αριθμούς από το μεγαλύτερο στο μικρότερο:	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Περιγράφω μια κατάσταση χρησιμοποιώντας είτε εξίσωση είτε διάγραμμα και ερμηνεύω τα αποτελέσματα μιας μαθηματικής κατάστασης.* **Παράδειγμα:** Δίνονται οι πιο κάτω λεκτικές αναπαραστάσεις: (α) Πώλησα δύο κιλά μήλα προς €3 το κιλό (β) Ξόδεψα €3 για να αγοράσω δύο κιλά μήλα (γ) Χρωστώ από €2 σε τρεις συμμαθητές μου (δ) Αποπληρώνω τρεις δόσεις των €2 η κάθε δόση. Να εκφράσετε τις λεκτικές εκφράσεις με την κατάλληλη αριθμητική παράσταση. *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς μπορώ να αναπαραστήσω τις ποσότητες σε κάθε έκφραση;* • *Πώς θα με βοηθήσει αν κατασκευάσω έναν πίνακα, για να αναπαραστήσω τις λεκτικές εκφράσεις;* **ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς μαθηματικούς κανόνες σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.* *Παρατηρώ τη δομή των μαθηματικών και τα μοτίβα στα μαθηματικά.* **Παράδειγμα:** Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς α και β, αν γνωρίζετε ότι: $\|3\alpha\beta\| = -3\alpha\beta$. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του*

μαθηματικών προτάσεων πρόσθεσης ή και αφαίρεσης που περιλαμβάνουν αρνητικούς αριθμούς (ακέραιους, δεκαδικούς και κλασματικούς). • **Αρ5.18 Κάνουν εκτιμήσεις του αποτελέσματος μιας πράξης και ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους.** • **Αρ5.21 Κατασκευάζουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, δεκαδικούς αριθμούς και με ποσοστά.** • **Αρ5.22 Επιλύουν**	$x = (3-5):(-2)$, $y = (2-8):3$ και $\omega = (-4-8):(-1-3)$	*προβλήματος;* • *Με ποιους τρόπους συνδέεται αυτό το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;* **ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ την εκτίμηση και άλλες μαθηματικές γνώσεις, για να κάνω υπολογισμούς.* **Παράδειγμα:** Να τοποθετήσετε τους αριθμούς στο διάγραμμα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε κύκλο να είναι ίσο με 0.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Τι πληροφορίες έχω;* • *Ποια προσέγγιση σκέφτομαι να δοκιμάσω πρώτα;*

εξισώσεις και ανισώσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών. • **Αρ4.14 Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, ποσοστά, ρίζες και δυνάμεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.**		
• **Αρ5.5 Διερευνούν και ορίζουν το λόγο, την αναλογία αριθμών και τις ιδιότητες των αναλογιών.** • **Αρ4.14 Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, ποσοστά, ρίζες και δυνάμεις και**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Πράξεις κλασμάτων **Νέες Έννοιες:** ✓ **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών $\boldsymbol{\alpha}$** και $\boldsymbol{\beta}$, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι **το πηλίκο των μέτρων τους.** ✓ Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών), θα ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο. ✓ **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Ερμηνεύω και κατανοώ το πρόβλημα.* *Αναλύω τα δεδομένα και καταστρώνω σχέδιο επίλυσης.* **Παράδειγμα:** Η Μαρίνα έχει αποταμιεύσεις σε τρεις τράπεζες, όπως δείχνει ο πιο κάτω πίνακας. Να γράψετε έναν τύπο, για να υπολογίζει η Μαρίνα τα υπόλοιπα των λογαριασμών της και το συνολικό τόκο που της δίνουν.

ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.

- **Αρ5.24 Επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά και προβλήματα ποσοστών (τόκου, φορολογίας, κέρδους και ζημιάς, κτλ.).**

✓ Το σύμβολο $\alpha\%$ ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με τον λόγο $\frac{\alpha}{100}$.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές:

- να ορίζουν τον λόγο δύο ποσών και να συγκρίνουν λόγους
- να ορίζουν την αναλογία και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των αναλογιών
- να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν σχέδια υπό κλίμακα
- να επιλύουν προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αναλογιών
- να επιλύουν προβλήματα ποσοστών

Παραδείγματα: Εφαρμογή του λόγου δύο μεγεθών και των αναλογιών σε φυσικά μεγέθη

- Μια ομάδα καλαθόσφαιρας ολοκλήρωσε το πρωτάθλημα με 8 ήττες. Ο λόγος των νικών της ομάδας προς τις ήττες είναι $\frac{3}{2}$. Να υπολογίσετε πόσες νίκες έκανε η ομάδα.
- Ένας ασθενής περιμένει 3 ώρες, για να εξυπηρετηθεί στο Νοσοκομείο. Η εξέταση του διάρκεσε 2 λεπτά. Ποιος είναι ο λόγος του χρόνου αναμονής προς τον χρόνο εξέτασης;

Τράπεζα	Υπόλοιπο Λογαριασμού	Επιτόκιο	Τόκος	Νέο Υπόλοιπο
Α	1456	3,80%		
Β	8357	4,30%		
Γ	67 039	4,75%		
Σύνολο				

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Τι πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;*
- *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.*

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Κατανοώ τη σημασία των ποσοτήτων και τις χρησιμοποιώ ευέλικτα σε πράξεις. Δίνω προσοχή στη σημασία των ποσοτήτων, όχι μόνο στον υπολογισμό τους.

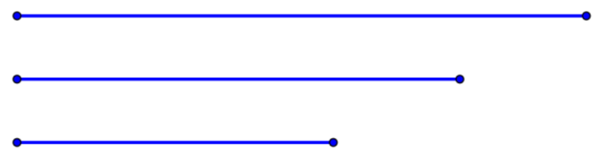
Παράδειγμα: Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξήθηκε κατά 10% τον ένα χρόνο και κατά 15% τον επόμενο χρόνο. Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν τη συνολική αύξηση του πληθυσμού. Ένας μαθητής απάντησε ότι η συνολική αύξηση του πληθυσμού στο τέλος του δεύτερου χρόνου ήταν 25%. Να ελέγξετε αν η απάντηση του μαθητή είναι ορθή και να περιγράψετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

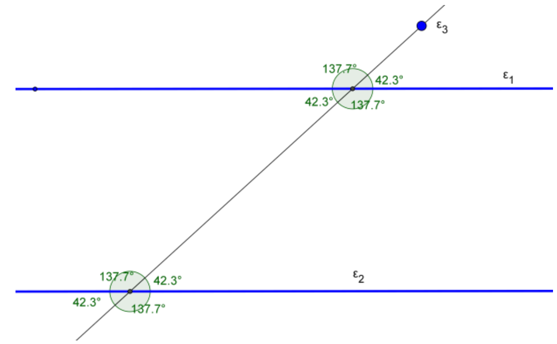
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Παράδειγμα: Εφαρμογή σχεδίου υπό κλίμακα
• Ένα αντικείμενο είναι σχεδιασμένο σε δύο διαφορετικά σχέδια. Στο πρώτο σχέδιο είναι σχεδιασμένο με κλίμακα $1:20$ και στο δεύτερο είναι σχεδιασμένο με κλίμακα $1:50$. Αν στο πρώτο σχέδιο το αντικείμενο έχει μήκος $4,5\ cm$, πόσο είναι το μήκος του αντικειμένου στο δεύτερο σχέδιο;
Παράδειγμα: Εφαρμογή των ιδιοτήτων των αναλογιών
• Δύο ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y=\frac{3x}{4}$. Να εξετάσετε κατά πόσον η σχέση ορίζει αναλογία.
Παράδειγμα: Πρόβλημα ποσοστών
• Η Μαίρη θέλει να αγοράσει ένα μπλουζάκι αξίας €30 το οποίο έχει έκπτωση 25%. Έχει στο πορτοφόλι της €22. Είναι αρκετά τα χρήματα που έχει για να αγοράσει το μπλουζάκι;
• Δύο κεφάλαια A και B τα οποία διαφέρουν κατά €5000 τοκίζονται με απλό τόκο για δύο χρόνια με επιτόκιο 5%. Αν ο συνολικός τόκος των δύο κεφαλαίων είναι €1600, να υπολογίσετε τα δύο κεφάλαια A και B.</td>
<td>Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Τι σημαίνει το σύμβολο %;
• Ποια είναι η σχέση μεταξύ των ποσοστών αύξησης του πληθυσμού για κάθε χρονιά;</td>
</tr>
<tr>
<td>• Αρ5.8 Ορίζουν τι είναι σύστημα αρίθμησης φυσικών αριθμών με</td>
<td></td>
<td>Η διδασκαλία των δεικτών Αρ5.8, Αρ5.13, Αρ5.19, Αρ6.6, Αρ6.7 και Αρ6.14 είναι απαραίτητη και αποτελεί προϋπόθεση για τη διδασκαλία άλλων εννοιών.</td>
</tr>
</table>

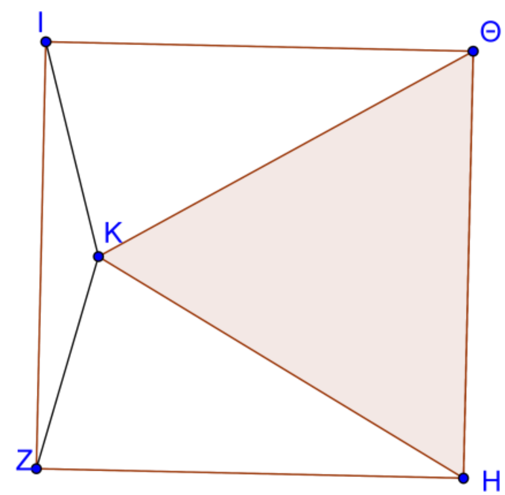
οποιαδήποτε βάση και μετατρέπουν αριθμούς από ένα σύστημα αρίθμησης σε άλλο. • **Αρ5.13 Κατανοούν το δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους.** • **Αρ5.19 Επιλύουν προβλήματα που αναφέρονται σε συστήματα αρίθμησης.** • **Αρ6.6 Ορίζουν και εφαρμόζουν τις βασικές συνολοθεωρητικές έννοιες, όπως**		

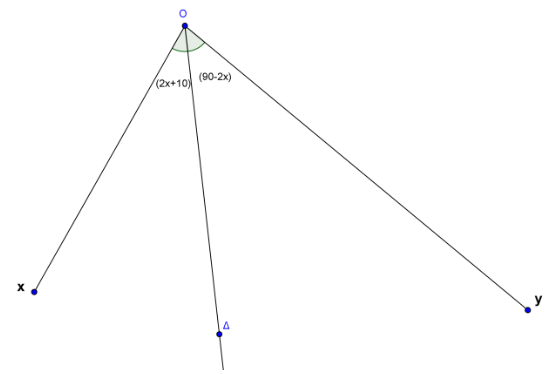
υποσύνολο, ισότητα συνόλων και αναφέρουν βασικές σχέσεις, όπως η ανακλαστική, η μεταβατική, η συμμετρική, η αντισυμμετρική, η σχέση ισοδυναμίας και διάταξης. • **Αρ6.7 Ορίζουν και εφαρμόζουν τις βασικές συνολοθεωρητικές πράξεις, όπως τομή, ένωση, συμπλήρωμα, διαφορά.** • **Αρ6.14 Εφαρμόζουν την έννοια του συνόλου, τις ιδιότητες και τις πράξεις συνόλων στην επίλυση προβλημάτων.**		

<table>
<tr><th colspan="3">ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>• Γ5.4 Ορίζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (στερεά, γεωμετρικά σχήματα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση δύο σημείων , μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων, πράξεις μεταξύ ευθύγραμμων τμημάτων, σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο/ευθεία, σχετικές θέσεις δύο</td>
<td>Προαπαιτούμενες γνώσεις
✓ Σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα καμπύλη, μοίρα και κύκλος.
✓ Ορθή, οξεία και αμβλεία γωνία .
Νέες έννοιες
✓ Απόσταση δύο σημείων Α και Β ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ που τα ενώνει.
✓ Ίσα ευθύγραμμα τμήματα είναι αυτά που έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος.
✓ Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι το σημείο του τμήματος που απέχει εξίσου από τα άκρα του.
Ο εκπαιδευτικός δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν ότι με τη χρήση χάρακα, συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα και βρίσκουν το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται επίσης, τη χρήση διαβήτη ως αναγκαίου οργάνου για τον ακριβή εντοπισμό του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος τυχαίου μήκους.
Παραδείγματα: Μέτρηση και σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων
• Να κατασκευάσετε τρίγωνο $ΑΒΓ$, χρησιμοποιώντας ως μήκη πλευρών τα ευθύγραμμα τμήματα που σας</td>
<td>ΜΠ.6 Ακρίβεια
Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς σε γεωμετρικές προτάσεις και αιτιολογώ προτάσεις δίνοντας, κατάλληλα παραδείγματα.
Παραδείγματα:
• Να ορίσετε τις έννοιες της ευθείας, της ημιευθείας και του ευθύγραμμου τμήματος, αναφέροντας τις βασικές διαφορές τους.
• Να δώσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου και να αναφέρετε τρεις ιδιότητές του.
• Να δώσετε τον ορισμό του ρόμβου και να αιτιολογήσετε γιατί ένας ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες που έχει και ένα παραλληλόγραμμο;
Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Γνωρίζω τον ορισμό του παραλληλογράμμου και των ειδικών παραλληλογράμμων;
• Γνωρίζω τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων; Μπορώ να διακρίνω ποια είδη παραλληλογράμμων έχουν κοινές ιδιότητες;
• Αν κάνω ένα βέννειο διάγραμμα πώς θα τοποθετούσα τα πιο κάτω σύνολα, σύμφωνα με τις ιδιότητές τους;
$A = \{παραλληλόγραμμα\}$</td>
</tr>
</table>

ευθειών στο επίπεδο, κάθετες ευθείες, απόσταση σημείου από ευθεία, χάραξη παράλληλων ευθειών, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος). • **Γ5.5 Ορίζουν και εφαρμόζουν γεωμετρικές έννοιες γωνιών και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (έννοια της γωνίας, σύγκριση γωνιών , μέτρηση γωνιών, πράξεις μεταξύ γωνιών, είδη γωνιών, διχοτόμος γωνιών, εφεξής γωνίες, κατακορυφήν γωνίες, συμπληρωματικές γωνιές, παραπληρωματικές**	δίνονται πιο κάτω, όταν ισχύει $AB > B\Gamma > \Gamma A$.  • Να κατασκευάσετε το μέσο M ενός ευθύγραμμου τμήματος AB που έχει μήκος 5 cm με χάρακα ή διαβήτη. • Να κατασκευάσετε το μέσο N ενός ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ που έχει μήκος μεταξύ 5,2 cm και 5,3 cm. **Νέες Έννοιες** ✓ **Επίπεδο** είναι η επιφάνεια που εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή. ✓ Κάθε ευθεία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο **ημιεπίπεδα** ✓ Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή**,** χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές**.** Καθεμιά από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται **Γωνία .** ✓ **Μηδενική γωνία** είναι η γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν και έχει μέτρο 0°. ✓ **Ευθεία γωνία** είναι η γωνία με μέτρο 180°. ✓ **Πλήρης γωνία** είναι η γωνία που έχει μέτρο ίσο με 360°. ✓ **Κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι μικρότερη των 180°. ✓ **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι	$B = \{ρόμβοι\}$ $\Gamma = \{ορθογώνια\ παραλληλόγραμμα\}$ $\Delta = \{τετράγωνα\}$ **ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κάνω κατασκευές, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παραδείγματα:** (α) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΔEZ με μήκη πλευρών: $\Delta E = 6\ cm$, $EZ = 10\ cm$ και $Z\Delta = 14\ cm$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου ΔEZ.(Να χρησιμοποιήσετε χάρακα, διαβήτη και μοιρογνωμόνιο). Να επαναλάβετε την κατασκευή με χρήση κατάλληλου λογισμικού και να αναφέρετε πιθανές ομοιότητες και διαφορές στις δύο μεθόδους. *Απαντώ στις ερωτήσεις* • *Ποια όργανα είναι απαραίτητα, για να με βοηθήσουν στην κατασκευή του τριγώνου;* • *Υπάρχει διαφορά όταν η κατασκευή μου γίνεται με λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας σε σχέση με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων;* • *Πώς είναι δυνατόν ο διαβήτης να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή ενός τριγώνου με ακριβή τρόπο;* (β) Στο εφαρμογίδιο *«parallhles.ggb»* ,μπορείτε να μεταβάλετε τη θέση της ευθείας ε_3, η οποία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$). Να

γωνιές, σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσα ευθεία τους, άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου). • **Γ5.7 Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος, κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής, κυκλικός τομέας, κυκλικό τμήμα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, σχετικές θέσεις δύο κύκλων, μέτρο τόξου και γωνίας, επίκεντρες γωνίες, εγγεγραμμένες γωνίες, γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη).**	μεγαλύτερη των 180° και μικρότερη των 360°. ✓ **Ίσες γωνίες** είναι οι γωνίες που ταυτίζονται, όταν μετατοπιστούν κατάλληλα. ✓ **Εφεξής γωνίες** είναι δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο σημείο. ✓ **Διαδοχικές γωνίες** ονομάζονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της. Ο εκπαιδευτικός βοηθά και αναπτύσσει δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές: • να αναγνωρίζουν, να συμβολίζουν και να διακρίνουν διαφορές μεταξύ βασικών Γεωμετρικών σχημάτων, όπως Ευθεία, Ημιευθεία-Ευθύγραμμο τμήμα και Επίπεδο-Ημιεπίπεδο • να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές με χρήση χάρακα, διαβήτη και γνώμονα • να επαναλαμβάνουν τις κατασκευές με χρήση κατάλληλου λογισμικού • να χρησιμοποιούν τις ορθές ορολογίες, για να δίνουν ορισμούς στα βασικά είδη γωνιών, όπως οξείες, αμβλείες, ορθές, κυρτές και μη κυρτές	γράψετε τη σχέση μεταξύ δύο εντός εναλλάξ γωνιών και δύο εντός και επί τα αυτά γωνιών, όταν μεταβάλλετε την ευθεία ε_3.  *Απαντώ στις ερωτήσεις* • *Ποιες σχέσεις παρατηρώ για τις ζητούμενες γωνίες, ενώ μεταβάλλονται οι γωνίες;* • *Πώς είμαστε σίγουροι ότι οι πιο πάνω παρατηρήσεις μας είναι ορθές;* **ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες (π.χ. το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι σταθερό ίσο με* 180^0 *ή η διχοτόμος μίας γωνίας την διαιρεί σε δύο ίσες γωνίες) για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.* **Παράδειγμα:** Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $Α = 60^0$ και $Β = 80^0$. Να φέρετε τις διχοτόμους $ΒΔ$ και $ΓΕ$.Αν $Ζ$ είναι το σημείο τομής των δύο διχοτόμων, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $ΒΖΓ$. Να

• **Γ4.3 Κατασκευάζουν το μέσο ευθύγραμμου τμήματος, την απόσταση μεταξύ παραλλήλων και την απόσταση σημείου και ευθείας.** • **Γ5.1 Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.** • **Γ3.9 Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό.** • **Γ4.4 Αναγνωρίζουν και ονομάζουν είδη γωνιών στο επίπεδο και στο χώρο (π.χ. συμπληρωματικές και παραπληρωματικές,**	**Παραδείγματα : Συμβολισμός και κατασκευή βασικών σχημάτων** • Να κατασκευάσετε με το χάρακά σας μία ευθεία AB ενός επιπέδου (Π), μία ημιευθεία Ax και ένα σημείο Γ του επιπέδου που να μην ανήκει στην ευθεία AB . Να σημειώσετε τους κατάλληλους συμβολισμούς για το κάθε σχήμα. • Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ με σταθερό μήκος $5\ cm$ και στη συνέχεια τη μεσοκάθετη του. **Παραδείγματα: Είδη γωνιών** • Να δώσετε τον ορισμό της οξείας και της αμβλείας γωνίας και στη συνέχεια να κατασκευάσετε με τα κατάλληλα γεωμετρικά όργανα μία οξεία, μία αμβλεία και μία ορθή γωνία. • Ποιες γωνίες ταξινομούνται ως κυρτές; • Να δώσετε ένα δικό σας αριθμητικό παράδειγμα γωνίας που να είναι μη κυρτή και να τη σχεδιάσετε με ακρίβεια στο τετράδιό σας. • Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της μηδενικής και της πλήρους γωνίας; Πως διακρίνετε τη μηδενική και την πλήρη γωνία σε μία κατασκευή; **Νέες έννοιες** ✓ **Διχοτόμος γωνίας** είναι η ημιευθεία, η οποία έχει ως αρχή την κορυφή της γωνίας και χωρίζει τη γωνία αυτή	διαπιστώσετε ότι το μέτρο της γωνίας $BZ\Gamma$ είναι επίσης ίσο με $\left(90^{\circ}+\frac{A}{2}\right)$ και να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{ZB\Gamma}=\left(90^{\circ}+\frac{A}{2}\right)$ σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$. *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Τι γνωρίζω για τη διχοτόμο μίας γωνίας;* **ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Το $I\Theta HZ$ είναι τετράγωνο και το ΘKH είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας IKZ. 

<table>
<tr>
<td>κατακορυφήν γωνίες που σχηματίζονται, όταν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες).</td>
<td>σε δύο ίσες γωνίες.
✓ Συμπληρωματικές είναι δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μια ορθή γωνία (90°).
✓ Παραπληρωματικές είναι δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μια ευθεία γωνία (180°).
✓ Αντικείμενες ημιευθείες ονομάζονται οι ημιευθείες, που ανήκουν στην ίδια ευθεία και έχουν κοινή μόνο την αρχή τους.
✓ Κάθετες ονομάζονται δύο ευθείες που τέμνονται και σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία.
✓ Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και περνά από το μέσο του.
Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:
• να ορίζουν και να κατασκευάζουν τη διχοτόμο μίας γωνίας.
• να ορίζουν και να εφαρμόζουν τις έννοιες των συμπληρωματικών παραπληρωματικών και κατακορυφήν γωνιών σε επίλυση προβλημάτων.
• να ορίζουν τις κάθετες ευθείες και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος. (Οι μαθητές αναφέρουν τη βασική ιδιότητα ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος).</td>
<td>Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Ποια είναι τα σταθερά μήκη στο τρίγωνο $K\Theta H$;
• Ποιες βασικές σχέσεις στα ισοσκελή τρίγωνα πρέπει να χρησιμοποιήσω;
Παράδειγμα: Η ημιευθεία $O\Delta$ χωρίζει μία γωνία xOy στις γωνίες $xO\Delta$ και $yO\Delta$ με μέτρο $(2x+10)^0$ και $(90-2x)^0$ αντίστοιχα. Η τιμή του x μεταβάλλεται από το $0-45$. Υπάρχει περίπτωση για κάποια τιμή του x η ημιευθεία $O\Delta$ να γίνει διχοτόμος της γωνίας xOy;.Τι παρατηρείτε για το μέτρο της γωνίας xOy όταν το x μεταβάλλεται από το $0-45$.


Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Πώς σχετίζονται οι δύο γωνίες μεταξύ τους όταν η $O\Delta$ είναι διχοτόμος;
• Πότε μια ποσότητα μπορεί να είναι σταθερή και πότε μεταβλητή;</td>
</tr>
</table>

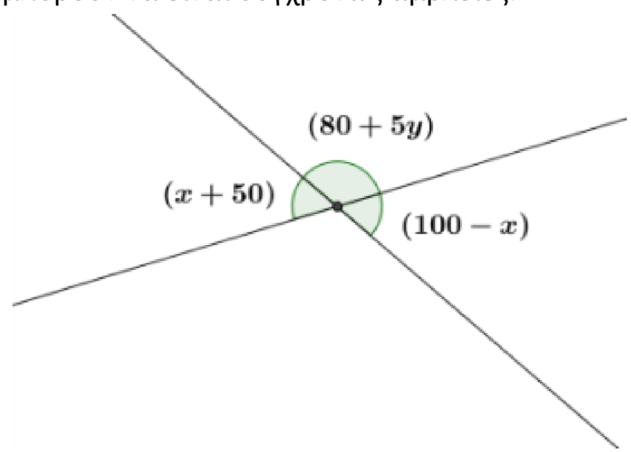
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Παραδείγματα: Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες

Δίνεται μία γωνία xOy με μέτρο 50^0. Να κατασκευάσετε και να υπολογίσετε τη γωνία, όταν είναι:

✓ συμπληρωματική της γωνίας xOy

✓ παραπληρωματική της γωνίας xOy

✓ κατακορυφήν με τη γωνία xOy
Να υπολογίσετε το μέτρο μίας γωνίας που είναι 10^0 μικρότερη από το τριπλάσιο της συμπληρωματικής της.
Να επεξηγήσετε γιατί δύο παραπληρωματικές γωνίες δεν μπορούν να είναι συγχρόνως αμβλείες.



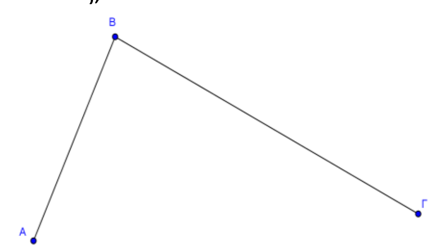
Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y στο σχήμα δικαιολογώντας την απάντησή σας.

</td>
<td>
ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, (κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος) σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Με χρήση χάρακα και διαβήτη,

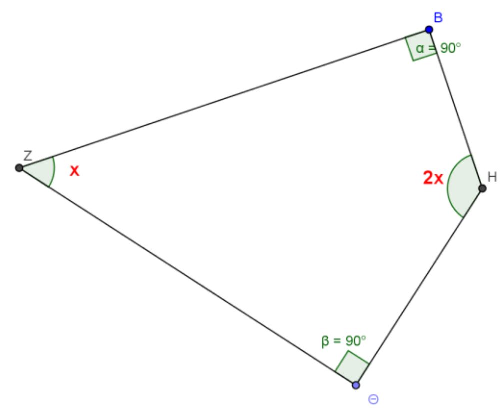
να κατασκευάσετε τη διχοτόμο Bx της γωνίας $AB\Gamma$.
με ποιο γεωμετρικό όργανο μπορείτε να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής σας;
Να πάρετε ένα τυχαίο σημείο πάνω στην διχοτόμο Bx και να μετρήσετε την απόσταση του από τις πλευρές της γωνίας AB και $B\Gamma$. Να συγκρίνετε τις δύο αποστάσεις;

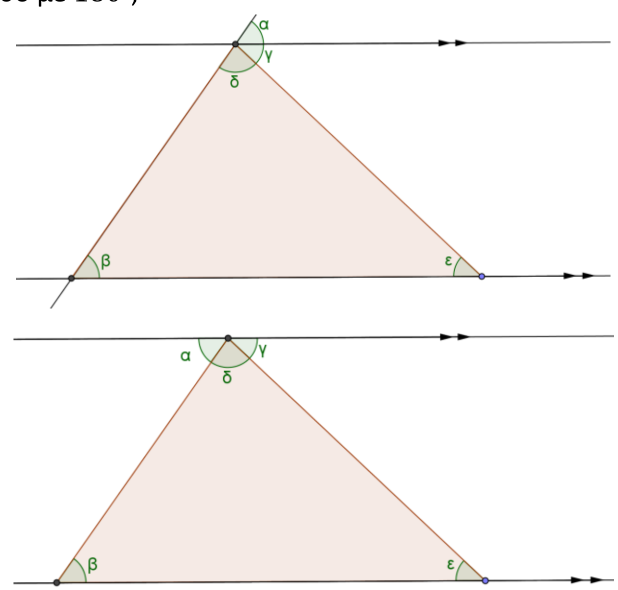


Απαντώ στις ερωτήσεις:

Ποιες ιδιότητες έχει η διχοτόμος μίας γωνίας;
Μπορώ να χρησιμοποιήσω το διαβήτη στην κατασκευή μιας διχοτόμου;
Πως ελέγχω την ορθότητα της λύσης μου; Ποιο γεωμετρικό όργανο μπορεί να με βοηθήσει στη σύγκριση των δύο αποστάσεων;

</td>
</tr>
</table>

	Παραδείγματα: Κάθετες ευθείες και μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος • Αν δίνεται η ευθεία (ε) και ένα σημείο A εκτός της ευθείας, να κατασκευάσετε ευθείες (ε_1) και (ε_2) που να διέρχονται από το σημείο A και να ισχύει $(\varepsilon_1)//(\varepsilon)$ και $(\varepsilon_2) \perp (\varepsilon)$. • Να προσδιορίσετε τη θέση ενός τυχαίου σημείου N, που να βρίσκεται σε απόσταση $3\ cm$ από το σημείο Λ του ευθυγράμμου τμήματος $K\Lambda$ και να κατασκευάσετε κάθετη ευθεία από το N προς την $K\Lambda$. • Να βρείτε δύο διαφορετικά σημεία που να απέχουν απόσταση $5\ cm$ από ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $6\ cm$. **Νέες Έννοιες** Όταν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3, τότε: ✓ οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ονομάζονται **εντός,** και όλες οι άλλες **εκτός,** ✓ οι γωνίες που βρίσκονται**,** προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε_3 ονομάζονται **επί τα αυτά μέρη.** ✓ Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα και η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας ε_3 ονομάζονται **εναλλάξ.**	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Σχηματίζω αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις από πραγματικά προβλήματα και τα μεταφράζω σε συμβολική αναπαράσταση επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα το τετράπλευρο έχει δύο ορθές γωνίες, ενώ οι δύο άλλες του γωνίες είναι άγνωστες. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες του τετραπλεύρου, αν γνωρίζουμε ότι η μία γωνία είναι διπλάσια της άλλης.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια σχέση ισχύει για το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου* • *Ποια μαθηματική εξίσωση ταιριάζει στο πρόβλημα;*

	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να ορίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τις εντός και επί τα αυτά μέρη και τις εντός, εκτός και επί τα αυτά. • να ανακαλύπτουν σχέσεις για τις πιο πάνω γωνίες , όταν οι δύο ευθείες που τέμνονται από τρίτη γωνία είναι παράλληλες. • χρησιμοποιεί τις πιο πάνω σχέσεις και αντίστροφα, έτσι ώστε να δημιουργηθούν κριτήρια, για να είναι δύο ευθείες παράλληλες. **Νέες έννοιες** ✓ **Τόξο κύκλου.** Δύο σημεία Α και Β του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη, που το καθένα ονομάζεται τόξο ΑΒ του κύκλου με άκρα τα Α και Β. ✓ **Κυκλικός δίσκος** $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{R})$ είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. ✓ **Επίκεντρη γωνία** είναι η γωνία, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες και τα στοιχεία του κύκλου. **Παραδείγματα: Στοιχεία κύκλου** • Να κατασκευάσετε τους κύκλους $(K, 4\ cm)$ και	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Στα πιο κάτω σχήματα το τρίγωνο περιέχεται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών. Να επεξηγήσετε με ποιο τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις γωνιών σε παράλληλες ευθείες, για να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών σε κάθε τρίγωνο είναι σταθερά ίσο με 180°; 

$(\Lambda, 2\ cm)$, όταν αν το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda = 5\ cm$.

- Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$ και να σημειώσετε μία διάμετρο του AB, μία επίκεντρη γωνία $AK\Gamma = 30^{\circ}$ και να υπολογίσετε το μέτρο των δύο τόξων που ορίζουν τα σημεία A και Γ στον κύκλο.
- Να βρείτε τη θέση των σημείων A και M ως προς τον κύκλο $(K, 10\ cm)$, αν $AK = 18\ cm$ και M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AK.

Νέες έννοιες

✓ **Παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς** τριγώνου είναι οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του.

✓ Το άθροισμα των γωνιών σε κάθε τρίγωνο είναι $\mathbf{180^{\circ}}$**.**

✓ **Εξωτερική** γωνία τριγώνου είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη μία πλευρά του τριγώνου και την προέκταση της άλλης.

✓ **Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευρά του.

✓ **Κέντρο Βάρους ή Βαρύκεντρο** ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.

✓ **Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μία κορυφή του προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του.

✓ **Ορθόκεντρο** είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

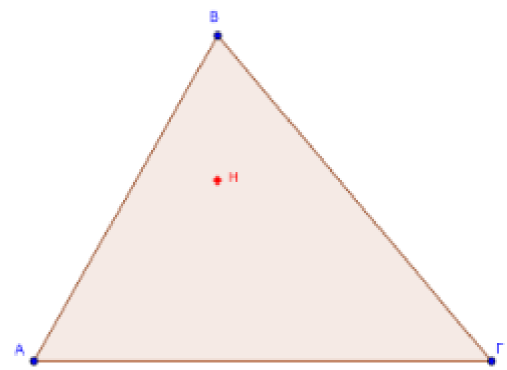
- *Πώς με βοηθούν τα δύο σχήματα να παρουσιάσω δύο αποδείξεις, έχοντας δεδομένο τις σχέσεις γωνιών που σχηματίζει τρίτη ευθεία όταν τέμνει δύο παράλληλες ευθείες;*
- *Τι είναι το ίδιο και τι διαφορετικό στα δύο σχήματα;*

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Παρατηρώ επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.

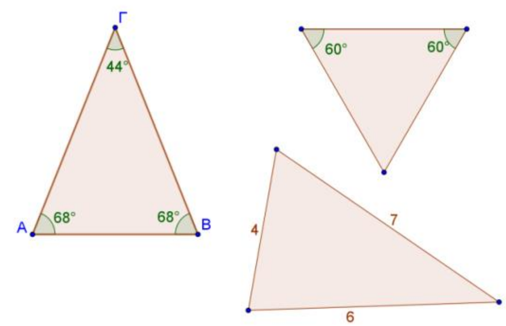
Παραδείγματα:

- Να δώσετε τον ορισμό του ορθόκεντρου σημείου σε τρίγωνο. Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο H στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθόκεντρο.



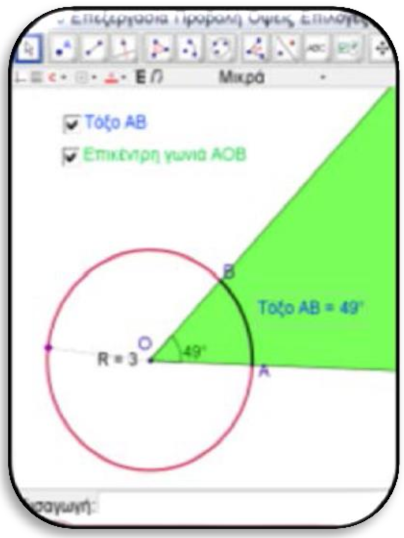
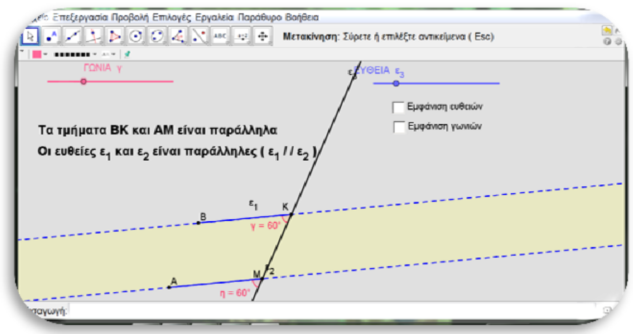
Απαντώ στις ερωτήσεις:

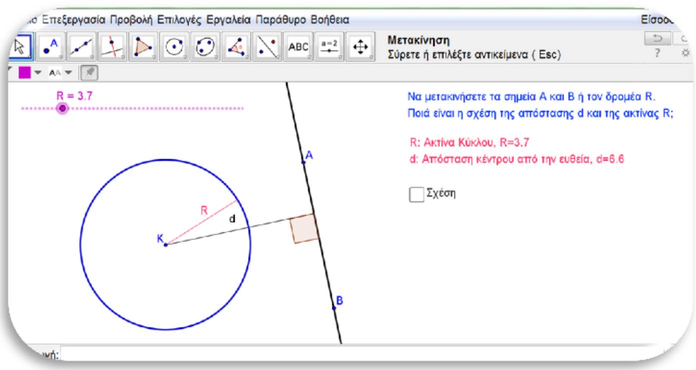
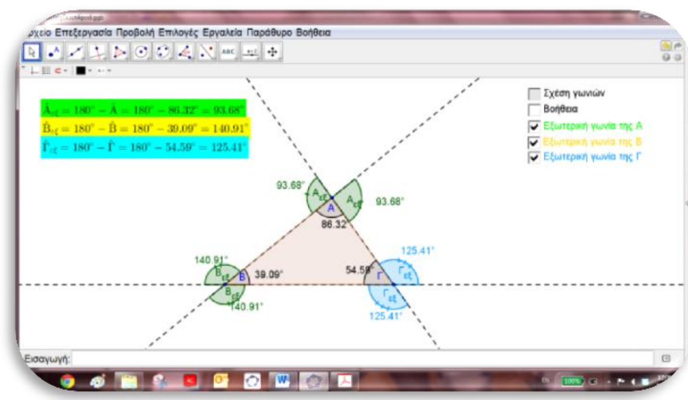
- *Γνωρίζω τον ορισμό του ορθόκεντρου;*
- *Πώς κάνω την αντίστοιχη κατασκευή;*

	✓ **Διχοτόμος** τριγώνου, ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνία του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά. ✓ **Έγκεντρο** είναι το σημείο τομής των διχοτόμων Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει οι μαθητές: • να αναγνωρίζουν βασικά είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές, αλλά και ως προς τις γωνίες τους. • να εφαρμόζει τη βασική σχέση για το άθροισμα γωνιών σε κάθε τριγώνου για να επιλύει προβλήματα • να ορίζουν τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, όπως διάμεσος, ύψος διχοτόμος και τα αντίστοιχα σημεία που δημιουργούνται από την τομή μεταξύ τους, όπως κέντρο **βάρους, ορθόκεντρο** και **έγκεντρο** **Παραδείγματα: Είδη τριγώνων** • Να αναγνωρίσετε ποια από τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή, ποια είναι ισόπλευρα και ποια είναι σκαληνά. 	• Να κατασκευάσετε, χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας, το ορθόκεντρο ενός τυχαίου τριγώνου. Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις μπορεί το ορθόκεντρο να βρίσκεται είτε εκτός του τριγώνου ή σε μια κορυφή του. • Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία για την κατασκευή του κέντρου βάρους του τριγώνου *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Τι παρατηρώ, για τη θέση του ορθόκεντρου, ανάλογα με το είδος του τριγώνου στο λογισμικό (μετακινώντας μία από τις κορυφές του);*

	• Να βρείτε το είδος του τρίγωνο $ΑΒΓ$ ως προς τις πλευρές αλλά και ως τις γωνίες του, αν έχει μήκη πλευρών $ΑΒ = 6\ cm$, $ΑΓ = 8\ cm$ και $ΒΓ = 10\ cm$. • Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. • Να βρείτε το είδος ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ ως προς τις πλευρές αλλά και ως προς τις γωνίες του, αν γνωρίζετε ότι η γωνία $Β$ είναι διπλάσια της $Α$ και η γωνία $Γ$ είναι 30^0 μεγαλύτερη της $Α$. **Παραδείγματα δευτερευόντων στοιχείων τριγώνου.** • Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο $ΑΔ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ και τη διάμεσο του $ΓΜ$. • Να κατασκευάσετε το έγκεντρο $Η$ ενός τυχαίου τριγώνου $ΑΒΓ$. • Να κατασκευάσετε τη διάμεσο ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ που έχει συντεταγμένες στο επίπεδο $Α(-1,1), Β(1,4)$ και $Γ(3,1)$. • Αν η οξεία γωνία που σχηματίζει το ύψος $ΑΔ$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ και η διχοτόμος του $ΒΕ$ είναι 55^0 να αποδείξετε ότι, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο.	

ΜΕΤΡΗΣΗ

Δείκτες Επιτυχίας	Δείκτες Επάρκειας	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
• **Μ4.8 Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.** • **Μ5.6 Κατασκευάζουν και ερμηνεύουν σχέδια υπό κλίμακα.** • **Μ5.10 Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής μεγεθών σε προβλήματα που παρουσιάζονται λεκτικά, αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά ή σε**	Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με στόχο την κατανόηση και την απόδειξη σχέσεων. **Παραδείγματα: Χρήση λογισμικών** • Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο εφαρμογίδιο για να κατανοήσετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο ενός τόξου με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.  	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En7_parallíles.ggb»*, για να διερευνήσετε τη σχέση που συνδέει τις γωνίες που σχηματίζονται, όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία.  • Να μεταβάλετε τον δρομέα $ΓΩΝΙΑ\ γ$ κατάλληλα ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες. • Να μεταβάλετε τον δρομέα $ΕΥΘΕΙΑ\ \varepsilon_3$ και να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών γ και η. • Να γράψετε τα συμπεράσματά σας.

πίνακες (γεωμετρικά προβλήματα, φόρος εισοδήματος, πληθωρισμός, συνάλλαγμα, κτλ.).	• Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο εφαρμογίδιο, για να ανακαλύψετε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της ακτίνας ενός κύκλου και της απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία, όταν η ευθεία παίρνει διάφορες θέσεις σε σχέση με τον κύκλο (τέμνει ή δεν τέμνει τον κύκλο).  **Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Λόγοι-Αναλογίες **Νέες έννοιες:** ✓ **Κλίμακα χάρτη** είναι ο λόγος της απόστασης στο σχέδιο προς την πραγματική απόσταση. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν τη σχέση που συνδέει τις διαστάσεις του πραγματικού αντικειμένου και τις διαστάσεις του σχεδίου υπό κλίμακα	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια εκτίμηση κάνω για να οδηγηθώ στη λύση;* • *Τι μπορεί να μου δείξει το εφαρμογίδιο που δεν θα μπορούσα να αντιληφθώ με μια απλή κατασκευή με γεωμετρικά όργανα;* **ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En7_Athrisma_Exxoteriki_Trig.ggb»*, για να διερευνήσετε τη σχέση που συνδέει την εξωτερική γωνία ενός τριγώνου με τις γωνίες του τριγώνου.  • Να εμφανίσετε την εξωτερική γωνία της A και να διερευνήσετε για διαφορετικά τρίγωνα τη σχέση που τη συνδέει με τις γωνίες του τριγώνου.

- να κατασκευάζουν σχέδια υπό κλίμακα
- να υπολογίζουν τις πραγματικές διαστάσεις αντικειμένων σε σχέδια με δεδομένη κλίμακα

Παράδειγμα : Κατανόηση της έννοιας της κλίμακας

- Να υπολογίσετε την κλίμακα με την οποία κατασκευάστηκαν τα τρία μικρότερα παπάκια σε σχέση με το μεγαλύτερο, αν αυτά έχουν ύψος $20cm$, $30cm$, $50cm$ και $70cm$.

Παράδειγμα: Κατασκευή σχεδίου υπό κλίμακα

- Να κατασκευάσετε το σχέδιο ενός τετράγωνου τραπεζιού πλευράς $80cm$, με κλίμακα $3:20$.

- Να δώσετε διάφορες τιμές στις γωνίες A και B και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

A	B	Γ	$A_{\varepsilon\xi}$

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Υπάρχει κανόνας που συνδέει το μέτρο της εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου με το μέτρο των γωνιών του;*
- *Ποια υπόθεση μπορώ να κάνω;*
- *Ισχύει για όλες τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου;*
- *Πώς μπορώ να αποδείξω ότι ισχύει η υπόθεση που έχω κάνει;*

ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

Αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές υποθέσεις, ορισμούς και αποτελέσματα για την ανάπτυξη ισχυρισμών.

Παράδειγμα: Αν σχεδιάσω ένα αντικείμενο με κλίμακα $1:100$, το σχέδιό μου έχει μικρότερες διαστάσεις παρά αν το σχεδιάσω με κλίμακα $1:50$. Να αιτιολογήσετε την πιο πάνω πρόταση.

	Παράδειγμα: Υπολογισμός πραγματικών διαστάσεων από σχέδιο υπό κλίμακα • Να υπολογίσετε το πραγματικό εμβαδόν δωματίου που στο σχέδιο υπό κλίμακα $3:500$, έχει διαστάσεις $15cm$ και $9cm$. **Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Λόγοι, Αναλογίες, Ποσοστά ✓ Απόσταση δύο σημείων ✓ Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος ✓ Μέτρο γωνίας, Διχοτόμος γωνίας, Σχέση δύο κατακορυφήν γωνιών ✓ Συμπληρωματικές -Παραπληρωματικές γωνίες ✓ Άθροισμα των γωνιών τριγώνου ✓ Εξωτερική γωνία τριγώνου ✓ Εμβαδόν και περίμετρος επίπεδων σχημάτων **Νέες έννοιες:** ✓ **Η απόσταση σημείου από ευθεία** είναι ίση με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ξεκινά από το σημείο και είναι κάθετο στην ευθεία. ✓ **Απόσταση παράλληλων ευθειών** ονομάζεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σε αυτές. ✓ **Σε τόξο μ μοιρών** $(\mu°)$ βαίνει **επίκεντρη γωνία** επίσης $\mu°$.	*Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς μπορώ να είμαι σίγουρος για τον πιο πάνω ισχυρισμό;* **ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.* *(α) Βάζω αριθμούς σε ένα πλαίσιο (ιστορία) και* *(β) αφαιρώ (αποπλαισιώνω) τους αριθμούς και μεταβλητές από το πλαίσιο (ιστορία) και εργάζομαι μαθηματικά.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε την κλίμακα του σχεδίου, για να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις του υπνοδωματίου. Η Βαρβάρα ισχυρίζεται ότι το εμβαδόν του σαλονιού είναι $6\ m^2$ ενώ το εμβαδόν του υπνοδωματίου είναι $10\ m^2$. Να αιτιολογήσετε γιατί ο ισχυρισμός της είναι ορθός ή λανθασμένος.  **κλίμακα $1:100$**

	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κάνουν υπολογισμούς με βάση τις πληροφορίες μεταβολής μεγεθών που δίνονται. **Παραδείγματα: Προβλήματα Μεταβολής** • Να διερευνήσετε την ορθότητα των προτάσεων: α. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου διπλασιάζεται, όταν διπλασιαστεί καθεμιά από τις απέναντι εσωτερικές. β. Αν υποδιπλασιαστεί μία γωνία, τότε η παραπληρωματική της διπλασιάζεται. • Να επεξηγήσετε ποια θα είναι η μεταβολή στην περίμετρο ενός ορθογωνίου, αν υποδιπλασιαστούν οι διαστάσεις του. • Να επεξηγήσετε ποια θα είναι η μεταβολή στο εμβαδόν ενός τετραγώνου, αν τριπλασιαστεί η πλευρά του. • Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι κατά $10°$ μικρότερη από το τετραπλάσιο της παραπληρωματικής της. • Ποια είναι η μεταβολή στο μέτρο των συμπληρωματικών γωνιών των πιο κάτω γωνιών, αν οι γωνίες διπλασιαστούν;	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Τι δείχνουν οι αριθμοί που εμφανίζονται στο πρόβλημα;* • *Ποιες ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να βρω πιο εύκολα την απάντηση;* **ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ είναι διπλάσιο από το μέτρο της γωνίας $\widehat{A}$. Το μέτρο της γωνίας $\widehat{Γ}$ είναι τριπλάσιο από το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$. Να υπολογίσετε το μέτρο των τριών γωνιών του τριγώνου. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.* • *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;* • *Περιγράφω τη σχέση που συνδέει τις γωνίες μεταξύ τους.* **ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Περιγράφω μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα και ερμηνεύω τα αποτελέσματα μιας μαθηματικής κατάστασης.* **Παράδειγμα:** Ένα ντεπόζιτο γεμίζει με νερό. Να αντιστοιχίσετε τα πιο κάτω σενάρια με την αντίστοιχη γραφική παράσταση, αν: 1.Το ντεπόζιτο γεμίζει με σταθερό ρυθμό. 2.Το ντεπόζιτο γεμίζει με σταθερό ρυθμό, σταματά να

$\hat{\alpha}$	Συμπληρωματική της $\hat{\alpha}$	$\widehat{2\alpha}$	Συμπληρωματική της $\widehat{2\alpha}$
$30°$			
$45°$			
$60°$			

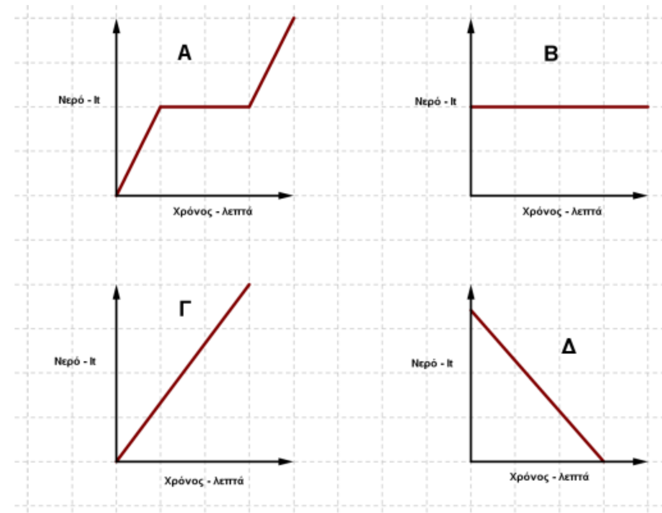
- Να καθορίσετε τον χώρο που θα διατεθεί για κάθε τύπο καταστήματος ενός εμπορικού κέντρου σύμφωνα με τον πιο κάτω πίνακα. Το σύνολο του διαθέσιμου χώρου είναι $25000\ m^2$. Να υπολογίσετε τον χώρο του πολυκαταστήματος που θα μείνει.

ΕΙΔΟΣ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΔΙΑΤΕΘΙΜΕΝΟΥ ΧΩΡΟΥ	ΕΝΟΙΚΙΑΣΙΜΟΣ ΧΩΡΟΣ
Γυναικεία Ένδυση	25	
Ανδρική Ένδυση	10	
Εστιατόρια	15	
Υπηρεσίες	5	
Υπόδηση	10	
Κοσμηματοπωλεία	3	
Είδη Δώρων	17	
Είδη Σπιτιού	7	

γεμίζει για ένα χρονικό διάστημα και συνεχίζει να γεμίζει με σταθερό ρυθμό.

3.Το ντεπόζιτο αδειάζει με σταθερό ρυθμό.

4.Το περιεχόμενο του ντεπόζιτου δεν διαφοροποιείται.



Απαντώ στην ερώτηση:

- *Πώς αναπαριστώ γραφικά τις πιο πάνω προτάσεις;*

- Να υπολογίσετε:
  α. την αξία €120 σε δολάρια Αμερικής.
  β. πόσα ευρώ θα πάρουμε με 80 λίρες Αγγλίας.

Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει την ισοτιμία ξένου συναλλάγματος σε σχέση με το Ευρώ. Ένα ευρώ αντιστοιχεί σε:

JPY	Ιαπωνικό Γεν	**130,30**
GBP	Αγγλική Λίρα	**0,73**
USD	Δολάριο Αμερικής	**1,09**
AUD	Δολάριο Αυστραλίας	**1,43**
CNY	Κινέζικο Γιουάν	6,74
CAD	Δολάριο Καναδά	**1,37**

ΜΠ.6 Ακρίβεια

Δίνω με ακρίβεια μαθηματικές απαντήσεις σύμφωνα με το πλαίσιο του προβλήματος και αιτιολογώ τις προτάσεις μου.

Παράδειγμα: Αν το μέτρο μιας γωνίας $\hat{A}$ παίρνει τιμές από το 20 μέχρι το 40, να υπολογίσετε ποιες τιμές παίρνει το μέτρο της παραπληρωματικής της.

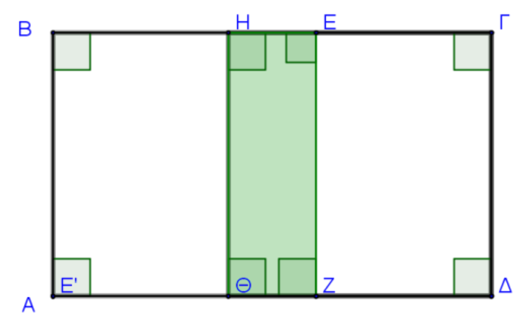
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ σε αυτή τη δραστηριότητα;*
- *Πώς αιτιολογώ τις απαντήσεις μου;*

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

Εφαρμόζω γενικούς μαθηματικούς κανόνες, για να εξηγήσω τους συλλογισμούς μου.

Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα τα τετράγωνα $ΑΒΕΖ$ και $ΗΓΔΘ$ έχουν πλευρά 15 cm. Αν το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ έχει διαστάσεις 15 cm και 25 cm, να υπολογίσετε τι ποσοστό του εμβαδού του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι σκιασμένο.



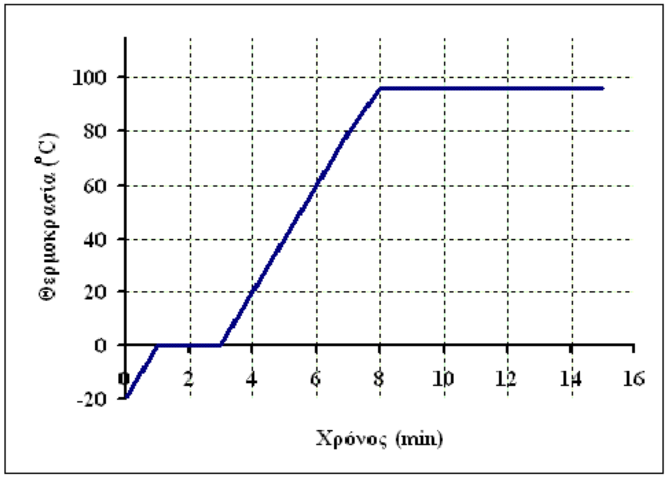
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;*
- *Με ποιους τρόπους συνδέεται το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;*

ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

Συγκρίνω δύο επιχειρήματα και διαπιστώνω αν η λογική του καθενός είναι σωστή ή λανθασμένη.

Παράδειγμα: Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας ενός υγρού συναρτήσει του χρόνου.



Η Θέλμα έγραψε στο τετράδιο της τα πιο κάτω:

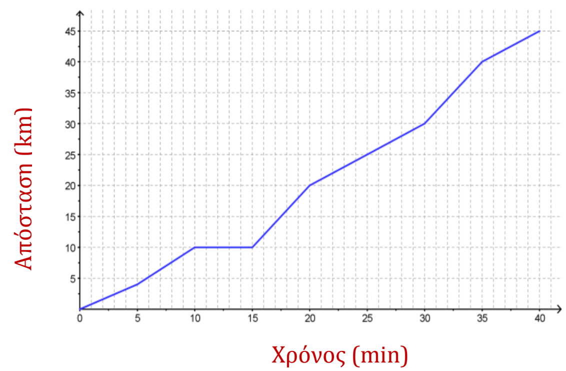
Η θερμοκρασία του υγρού:

		• $0-1\ min$: μειώνεται • $1-3\ min$:μένει σταθερή • $3-16 min$: αυξάνεται Η Αρίστη έγραψε στο τετράδιο της τα πιο κάτω: Η θερμοκρασία του υγρού: • $0-1\ min$: αυξάνεται • $1-3\ min$: μένει σταθερή • $3-8\ min$: αυξάνεται • $8-16\ min$: μένει σταθερή. Και οι δύο ισχυρίζονται ότι η απάντησή τους είναι ορθή. Ποια από τις δύο έχει δίκιο; *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς μπορώ να είμαι σίγουρος για την απάντησή μου;*
• **Μ4.9 Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ *Έννοια της συνάρτησης* ✓ *Σχέση διαστήματος, χρόνου, ταχύτητας* Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση: • να μελετούν και να ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων απόστασης συναρτήσει του χρόνου • να υπολογίζουν το χρόνο και την απόσταση σε προβλήματα κίνησης	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.* **Παράδειγμα:** Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την μετατόπιση σε cm που διανύουν δύο κινητά A και B σε συνάρτηση με τον χρόνο σε s.

- **Μ5.11 Κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις σε προβλήματα κίνησης.**

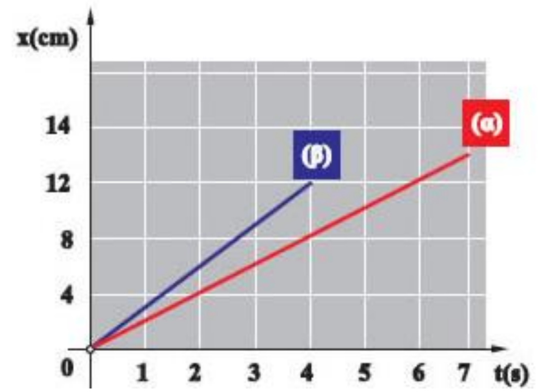
Παράδειγμα: Ερμηνεία γραφικής παράστασης συνάρτησης

- Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η απόσταση σε (km) που διανύει ένα ποδήλατο σε χρόνο 40 λεπτών.



α. Να εντοπίσετε σε ποιο χρονικό διάστημα το ποδήλατο παραμένει ακίνητο και σε ποιο διάστημα κινείται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα.

β. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται το ποδήλατο, για να καλύψει τα πρώτα 20 km της διαδρομής.



α. Να υπολογίσετε την απόσταση που κάλυψε το κινητό A.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση που κάλυψε το κινητό B .

γ. Ποιο από τα δύο κινητά κάλυψε μεγαλύτερη απόσταση στο τέλος του ταξιδιού τους;

δ. Ποιο από τα δύο κινητά έχει καλύψει μεγαλύτερη απόσταση σε 2 s;

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Ποιες πληροφορίες μου δίνει η γραφική παράσταση;*

<table>
<tr><th colspan="3">ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>

ΣΠ5.1 Διακρίνουν τα διάφορα είδη μεταβλητών (Ποιοτικές, Ποσοτικές, Διακριτές, Συνεχείς).
ΣΠ5.2 Μελετούν τις χρήσεις της Στατιστικής ως εργαλείου διερεύνησης υποθέσεων των χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού και παρουσιάζουν τα δεδομένα σε διάφορες μορφές (πίνακες, διαγράμματα συχνοτήτων ραβδογράμματα, ιστογράμματα, κυκλικά διαγράμματα, φυλλογραφήματα), με ή χωρίς τη χρήση

</td>
<td>
Νέες Έννοιες:

✓ Πληθυσμός μιας έρευνας ονομάζεται ένα συγκεκριμένο σύνολο αναφοράς, για το οποίο συλλέγονται κάποια στατιστικά δεδομένα.

✓ Μεταβλητή μιας έρευνας ονομάζεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετούνται τα στοιχεία ενός πληθυσμού.

✓ Συχνότητα μιας τιμής ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των εμφανίσεων της τιμής αυτής.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

να κατανοήσουν σε μια έρευνα τις έννοιες του πληθυσμού, της μεταβλητής και του είδους της μεταβλητής
να ορίζουν τι είναι συχνότητα, να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν πίνακες συχνοτήτων
να διαβάζουν, να ερμηνεύουν και να αντλούν πληροφορίες από γραφικές παραστάσεις

</td>
<td>
ΜΠ.6 Ακρίβεια

Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.

Παράδειγμα: Συγκεντρώσαμε στοιχεία από διερχόμενα οχήματα σε κάποιο σημείο μιας πόλης. Μερικά από τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα:
<table>
<tr><th>Είδος Οχήματος</th><th>Χρώμα</th><th>Ταχύτητα (km/h)</th><th>Πλήθος Επιβατών</th></tr>
<tr><td>Αυτοκίνητο</td><td>Μαύρο</td><td>63</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Φορτηγό</td><td>Γκρίζο</td><td>41</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Μοτοσυκλέτα</td><td>Μαύρο</td><td>79</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Ποδήλατο</td><td>Κόκκινο</td><td>8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Λεωφορείο</td><td>Κίτρινο</td><td>36</td><td>27</td></tr>
</table>
(α) Να εξετάσετε το είδος των μεταβλητών της έρευνας.

(β) Ποια ήταν η ταχύτητα του κόκκινου οχήματος;

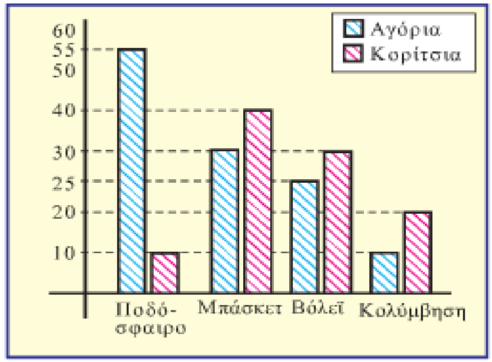
(γ) Πόσους επιβάτες είχε το όχημα με την μεγαλύτερη ταχύτητα;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ σε αυτήν τη δραστηριότητα;
Πώς αιτιολογώ ότι οι απαντήσεις μου είναι λογικές;

</td>
</tr>
</table>

λογισμικού. • **ΣΠ4.2 Διαβάζουν και κατασκευάζουν ραβδογράμματα, εικονογράμματα, κυκλικές και γραμμικές γραφικές παραστάσεις, φυλλογραφήματα και διαφοροποιούν τον τρόπο παρουσίασης συνεχών και κατηγορικών δεδομένων με ή χωρίς τη χρήση τεχνολογίας.**	• να κατασκευάζουν ραβδογράμματα, ιστογράμματα και κυκλικά διαγράμματα, επιλέγοντας κάθε φορά την κατάλληλη γραφική παράσταση για την παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων μιας έρευνας **Παράδειγμα: Κατανόηση των εννοιών του πληθυσμού, της μεταβλητής και του είδους της μεταβλητής** • Να βρεθεί ο πληθυσμός, η μεταβλητή και το είδος της μεταβλητής σε καθεμιά από τις παρακάτω έρευνες: (α) Έρευνα με θέμα: «Πόσες ώρες γυμνάζονται εβδομαδιαία οι μαθητές του σχολείου Α;» (β) Έρευνα με θέμα: «Ποια είναι η οικογενειακή κατάσταση των υπαλλήλων μιας εταιρείας;» **Παράδειγμα: Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων** • Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων, συγκεντρώνοντας τα δεδομένα: $130, 131, 132, 132, 133, 134, 137, 137, 138, 139, 139, 141, 142, 142, 143, 144, 145, 147, 149$ Οι πιο πάνω αριθμοί αντιπροσωπεύουν το ύψος 20 παιδιών μιας τάξης σε cm. **Παράδειγμα: Ερμηνεία ενός ραβδογράμματος** • Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζονται οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός Γυμνασίου στο ερώτημα «Ποιο άθλημα προτιμάτε;».	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (μία γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο) για να εξερευνώ και να καταλαβαίνω τον κόσμο.* **Παράδειγμα:** Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τους τρόπους με τους οποίους μεταβαίνουν 500 μαθητές στο σχολείο τους.  (α) Να κάνετε μια εκτίμηση για το πλήθος των μαθητών που μεταβαίνουν στο σχολείο με αυτοκίνητο. (β) Οι μαθητές που μεταβαίνουν στο σχολείο με λεωφορείο είναι 200 ενώ το πλήθος των μαθητών που χρησιμοποιούν αυτοκίνητο ισούται με το πλήθος των μαθητών που μεταβαίνουν στο σχολείο με ποδήλατο ή με τα πόδια. Πόσοι μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Με ποιο τρόπο εκτιμώ το πλήθος των μαθητών που μεταβαίνουν στο σχολείο με αυτοκίνητο;* • *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα, για να υπολογίσω το πλήθος των μαθητών που μεταβαίνουν στο σχολείο με αυτοκίνητο;* • *Ποια εργαλεία μπορώ να χρησιμοποιήσω;*



(α)Ποιο άθλημα προτιμούν οι περισσότεροι μαθητές;

(β)Ποιο άθλημα προτιμούν τα κορίτσια;

(γ) Πόσοι είναι οι μαθητές της Α’ τάξης του Γυμνασίου αυτού;

Παράδειγμα: Ερμηνεία ενός κυκλικού διαγράμματος

- Στο πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα ενός μαθητή. Το συνολικό ποσό των μηνιαίων εξόδων του μαθητή είναι €120.

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

Κατασκευάζω κατάλληλες γραφικές παραστάσεις για να περιγράψω τα δεδομένα μιας έρευνας και τις ερμηνεύω.

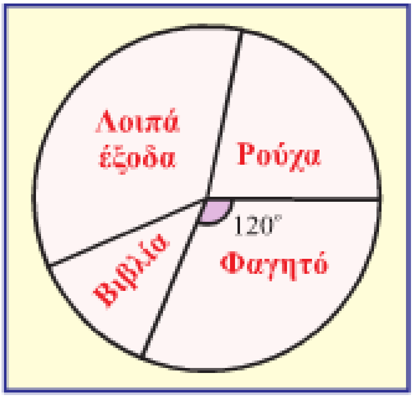
Παράδειγμα: Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία ανά μήνα στη Λευκωσία για μερικούς μήνες ενός ημερολογιακού έτους και τον αριθμό των βροχερών ημερών ανά μήνα.

Μήνας	Μέση Θερμοκρασία	Αριθμός Βροχερών Ημερών
Σεπτέμβριος	31,2	3
Οκτώβριος	27,6	8
Νοέμβριος	24,3	10
Δεκέμβριος	17,9	17
Ιανουάριος	13,3	16
Φεβρουάριος	14,7	13
Μάρτιος	18,5	14
Απρίλιος	23,3	6

Να παραστήσετε τα δεδομένα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες γραφικές παραστάσεις.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποια είναι η καταλληλότερη γραφική παράσταση για να αναπαραστήσω τα δεδομένα του πιο πάνω πίνακα;*
- *Πώς με βοηθά η γραφική παράσταση να ερμηνεύσω τα δεδομένα της έρευνας αυτής;*



(α) Πόσα χρήματα ξοδεύει ο μαθητής για φαγητό το μήνα;

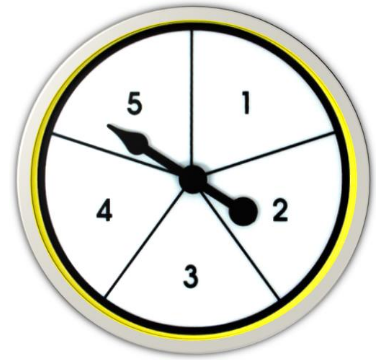
(β) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που αντιστοιχεί στον τομέα «Βιβλία», αν γνωρίζουμε ότι το μηνιαίο ποσό που ξοδεύει σε βιβλία ο μαθητής είναι €12;

Παράδειγμα: Επιλογή κατάλληλου στατιστικού διαγράμματος, για την παρουσίαση στατιστικών δεδομένων

- Να επιλέξετε κατάλληλο διάγραμμα, για να παρουσιάσετε τα πιο κάτω δεδομένα, που αναφέρονται στη μάζα γέννησης 24 κουταβιών σε γραμμάρια.

  $400, 440, 470, 470, 500, 500, 500, 500,$
  $530, 530, 530, 530, 530, 530, 530, 560,$
  $560, 560, 560, 560, 560, 560, 560, 590$

• **ΣΠ5.6 Κατανοούν μέσα από πραγματικές καταστάσεις και χρησιμοποιούν τις έννοιες πείραμα τύχης, ενδεχόμενο, δειγματικός χώρος.** • **ΣΠ4.4 Αναπαριστούν το δειγματικό χώρο πειραμάτων με πολλαπλούς τρόπους συμπεριλαμβανομέ-νων δενδροδιαγραμμά-των.** • **ΣΠ5.7 Υπολογίζουν την πιθανότητα απλού ενδεχομένου (κλασσικός ορισμός πιθανότητας, Laplace) δειγματικού χώρου ισοπίθανων στοιχειωδών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης.**	**Νέες Έννοιες:** ✓ **Πείραμα τύχης** ονομάζεται η διαδικασία η οποία εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες, που δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμά της, αλλά ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων. ✓ **Δειγματικός χώρος** ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. ✓ **Δυνατό ενδεχόμενο** ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. ✓ **Ευνοϊκά αποτελέσματα** ενός ενδεχομένου ονομάζεται το σύνολο, που αποτελείται από τα στοιχεία του συγκεκριμένου ενδεχομένου. ✓ **Ισοπίθανα αποτελέσματα** ονομάζονται τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου που έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής. ✓ **Πιθανότητα ενδεχομένου** σε ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, ονομάζεται ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του ενδεχομένου αυτού. ✓ **Βέβαιο ενδεχόμενο** ονομάζεται το ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. ✓ **Αδύνατο ενδεχόμενο** ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν περιλαμβάνει κανένα δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια του πειράματος τύχης, του δειγματικού χώρου και του δυνατού ενδεχομένου, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Σε ένα κουτί υπάρχουν κόκκινες, κίτρινες και μπλε μπάλες. Αν επιλέξω τυχαία μία μπάλα από το κουτί, το ποσοστό επιτυχίας επιλογής μπλε μπάλας είναι 50%. Αν αφαιρέσω από το κουτί όλες τις μπλε μπάλες, το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κίτρινης μπάλας είναι 50%. (α) Αν αφαιρέσω από το κουτί όλες τις κίτρινες μπάλες, ποιο είναι το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κόκκινης μπάλας; (β) Αν οι κόκκινες μπάλες στο κουτί είναι 4, πόσες μπάλες ήταν αρχικά τοποθετημένες στο κουτί; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια είναι η σχέση μεταξύ του πλήθους των μπαλών κάθε χρώματος που είναι τοποθετημένες στο κουτί;* • *Πώς συσχετίζω το πλήθος των μπλε μπαλών με το πλήθος των μπαλών που είναι τοποθετημένες στο κουτί; Πως μπορώ να ερμηνεύσω τη σχέση αυτή;* **ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Ο Τάκης γύρισε τον πιο κάτω τροχό της τύχης δύο φορές. Ποιο είναι το πιο πιθανό άθροισμα, αν κάθε φορά προσθέτει τους αριθμούς στις ενδείξεις του τροχού;

• **ΣΠ5.8 Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε τυχαία, απλά, βέβαια, αδύνατα.**	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να ορίζουν το πείραμα τύχης, το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και το δυνατό ενδεχόμενο • να υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένων και να εφαρμόζουν τον ορισμό πιθανότητας στην επίλυση προβλήματος • να κατανοήσουν ότι η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι ένας αριθμός που κυμαίνεται από 0 μέχρι και 1. **Παράδειγμα: Έννοια του πειράματος τύχης, του δειγματικού χώρου και του δυνατού ενδεχομένου** • Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη που εμφανίζεται. (α) Να αναφέρετε το δειγματικό χώρο του πιο πάνω πειράματος τύχης. (β) Να αναφέρετε δύο δυνατά ενδεχόμενά του. **Παραδείγματα: Ορισμός της πιθανότητας** • Εξετάσαμε 30 μαθητές μιας τάξης ως προς τον αριθμό των ωρών που διαβάζουν κάθε μέρα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.	 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια είναι η ερώτηση του προβλήματος;* • *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;* • *Ποιες προηγούμενες γνώσεις χρειάζομαι;* • *Πώς θα επιλύσω το πρόβλημα αυτό;* • *Είναι η απάντησή μου λογική;* **ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Ο Ανδρέας ρίχνει δύο ζάρια και παρατηρεί τις ενδείξεις τους. Ακολούθως, η Ελένη επαναλαμβάνει το πείραμα. Ο Ανδρέας κερδίζει, αν το άθροισμα των ενδείξεων ισούται με 7 ενώ η Ελένη κερδίζει, όταν οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες. Ο Κώστας, ο οποίος είναι θεατής στο παιχνίδι αυτό, ισχυρίζεται ότι το παιχνίδι ευνοεί τον Ανδρέα. Να εξετάσετε κατά πόσο ο Κώστας έχει δίκαιο. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς ελέγχω την ορθότητα του πιο πάνω ισχυρισμού;* • *Πώς αιτιολογώ την απάντησή μου;*

Αριθμός Ωρών	Αριθμός Μαθητών
0	8
1	11
2	7
3	4

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρεθεί η πιθανότητα:

(α) να διαβάζει ακριβώς μία ώρα

(β) να διαβάζει τουλάχιστον δύο ώρες

(γ) να διαβάζει το πολύ μια ώρα

- Ένα κιβώτιο περιέχει 20 μπάλες (άσπρες και μαύρες). Διαλέγουμε στην τύχη μία μπάλα από το κιβώτιο. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{2}{5}$, πόσες μαύρες μπάλες περιέχονται μέσα στο κιβώτιο;

Παράδειγμα: Έννοια του βέβαιου-αδύνατου ενδεχομένου

- Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξή του. Ποια είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου

  A: «να φέρω ένδειξη 0»

  B: «να φέρω ένδειξη μεγαλύτερη του 0»

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Παρατηρώ επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης και συνδέω τα πειραματικά δεδομένα με τη θεωρία.

Παράδειγμα: Ο Κώστας ρίχνει ένα νόμισμα 500 φορές. Τα αποτελέσματα είναι 261 κορώνες και 239 γράμματα. Με βάση τα δεδομένα αυτά, να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

K: «εμφάνιση κορώνας»

Γ: «εμφάνιση γράμματος»

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το νόμισμα είναι αμερόληπτο;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς ελέγχω αν ο πιο πάνω ισχυρισμός είναι ορθός ή όχι;*
- *Μπορώ να οδηγηθώ σε κάποια γενίκευση μέσα από τα πειραματικά δεδομένα του προβλήματος;*

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

Οργανώνω τις πιθανότητες διάφορων ενδεχομένων, ώστε να κατανοήσω καλύτερα την έννοια της πιθανότητας.

Παράδειγμα: Δίνεται το σύνολο:

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15, 16\}$$

Να επιλέξετε στην τύχη έναν αριθμό από το σύνολο A.

Να τοποθετήσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων στην κατάλληλη περιοχή του άξονα των πραγματικών αριθμών.

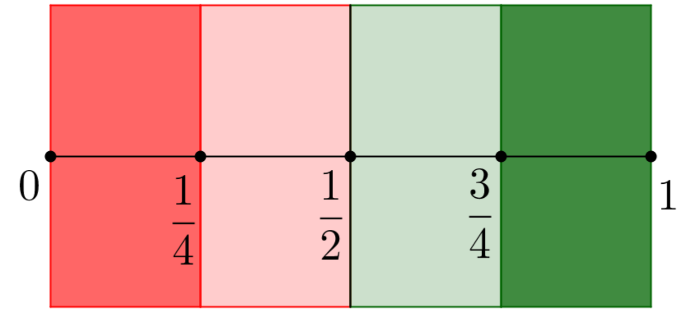
B: «ο αριθμός να είναι άρτιος»

Γ: «ο αριθμός να είναι μονοψήφιος περιττός»

Δ: «ο αριθμός να είναι μεγαλύτερος του 14»

E: «ο αριθμός να είναι μικρότερος του 15»

Z: «ο αριθμός να είναι μικρότερος ή ίσος του 9»



Ποιο από τα πιο πάνω ενδεχόμενα είναι πιθανότερο να πραγματοποιηθεί και ποιο είναι το λιγότερο πιθανό;

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Ποιες παρατηρήσεις μπορώ να κάνω, χρησιμοποιώντας το πιο πάνω διάγραμμα;*

• **ΣΠ4.3 Αξιολογούν διάφορους τρόπους παρουσίασης δεδομένων σε σχέση με την αποτελεσματικότητα και τη συνέπειά τους.** • **ΣΠ4.5 Υπολογίζουν τη θεωρητική πιθανότητα ενός ενδεχομένου, τη χρησιμοποιούν στην πρόβλεψη αποτελεσμάτων σε πειράματα τύχης και κατανοούν τη διαφορά μεταξύ ανεξάρτητων και εξαρτημένων ενδεχομένων.**		Η διδασκαλία των δεικτών ΣΠ4.3 και ΣΠ4.5 είναι απαραίτητη και αποτελεί προϋπόθεση για τη διδασκαλία άλλων εννοιών.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

<table>
<tr><th colspan="3">ΑΛΓΕΒΡΑ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>

- **Α4.13 Μεταφράζουν αλγεβρικά σύμβολα σε λεκτική μορφή και αντίστροφα.**
- **Α4.10 Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις που περιλαμβάνουν αλγεβρικά κλάσματα και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών**

</td>
<td>

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Αριθμητική-Αλγεβρική Παράσταση
✓ Αριθμητική Τιμή Αλγεβρικής Παράστασης
✓ Ιδιότητες Δυνάμεων

Νέες Έννοιες:

✓ **Μονώνυμο** ονομάζεται κάθε γινόμενο το οποίο αποτελείται από πραγματικό αριθμό και μεταβλητές με εκθέτη μη αρνητικό ακέραιο αριθμό.
✓ **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μονωνύμων. Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

- να διακρίνουν είδη αλγεβρικών παραστάσεων, όπως μονώνυμο και πολυώνυμο, και να αναφέρουν τα στοιχεία τους, όπως «συντελεστής», «κύριο μέρος», «βαθμός», «όροι»
- να κατανοήσουν τον ορισμό του πολυωνύμου και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή του για συγκεκριμένη πραγματική τιμή της μεταβλητής του

</td>
<td>

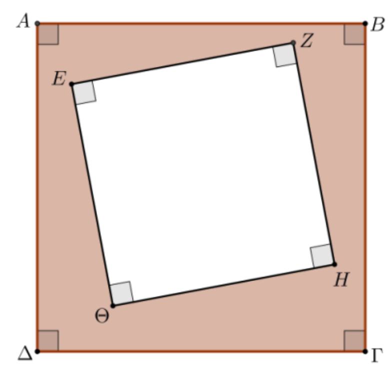
ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Χρησιμοποιώ την έννοια του μονωνύμου-πολυωνύμου, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, τα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ είναι τετράγωνα με πλευρές $AB = x + 2$ και $EZ = \frac{x}{2} + 4$.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας δίνεται από την παράσταση $\frac{3x^2}{4} - 12$.

(β) Αν το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι ίσο με $135\ m^2$, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών των τετραγώνων.



</td>
</tr>
</table>

«εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και «παράσταση».

- **Α5.13 Εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων και αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά βασικές αλγεβρικές ταυτότητες.**
- **Α4.11 Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.**

- χρησιμοποιούν αλγεβρικές τεχνικές και γεωμετρικά μοντέλα, για να εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων

Παράδειγμα: Διάκριση αλγεβρικών παραστάσεων σε μονώνυμα και πολυώνυμα

- Να αναγνωρίζουν το είδος των πιο κάτω αλγεβρικών παραστάσεων (μονώνυμο, πολυώνυμο):

  $3x^2, \frac{\alpha^2\beta^4}{5}$ και $7x^2 - \frac{1}{2}x + 6$

Παράδειγμα: Αναγνώριση των στοιχείων ενός πολυωνύμου

- Να αναφέρουν τα στοιχεία ενός μονωνύμου.

  Μονώνυμο: $-\frac{2}{3}\alpha x^2 y^3$

  Συντελεστής: $-\frac{2}{3}$

  Κύριο Μέρος: $\alpha x^2 y^3$

  Βαθμός ως προς x: 2

  Βαθμός: $1 + 2 + 3 = 6$

Παράδειγμα: Όμοια-Αντίθετα μονώνυμα

- Παρουσιάζονται ζεύγη μονωνύμων, όπως $3x^2y$ και $-3x^2y$, με στόχο να κατανοήσουν την έννοια των όμοιων και των αντίθετων μονωνύμων.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα δύο εμβαδά;
- Ποιες ιδιότητες μπορώ να χρησιμοποιήσω για να βρω την απάντηση;

ΜΠ.6 Ακρίβεια

Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.

Παράδειγμα: Να επιλέξετε την ορθή απάντηση στις πιο κάτω περιπτώσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) Ποιο από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμο;

Α. $x^2 - 2x$ Β. $4x$ Γ. $-3x^3 + 2$ Δ.

(β) Ποιο είναι το αντίθετο μονώνυμο του $-4x^2y^3$;

Α. $-\frac{1}{4}x^2y^3$ Β. $-4x^2y^3$ Γ. $4x^3y^2$ Δ. $4x$

(γ) Ο βαθμός του πολυωνύμου $3x^2 - 5 + 4x + x^4 - 7x^3$ είναι:

Α. 10 Β. 3 Γ. 2 Δ.

(δ) Τα μονώνυμα $2x^{3\kappa}y^4$ και $-x^6y^{6\mu-2}$ είναι όμοια όταν:

Α. $\kappa = 6, \mu = 4$ Β. $\kappa = -2, \mu = 1$ Γ. $\kappa = 2, \mu = -1$ Δ. $\kappa = 2, \mu = 1$

Παράδειγμα: Κατασκευή πολυωνύμου-Εύρεση της αριθμητικής τιμής του

Να κατασκευάσουν μιαν αλγεβρική παράσταση που να περιγράφει τα πιο κάτω βήματα:

- Σκέφτομαι έναν αριθμό.
- Τον πολλαπλασιάζω επί τον εαυτό του.
- Στο αποτέλεσμα προθέτω το διπλάσιο του αριθμού που σκέφτηκα.

Ποιο θα είναι το τελικό αποτέλεσμα αν ο αριθμός που σκεφτήκατε αρχικά ήταν ο:

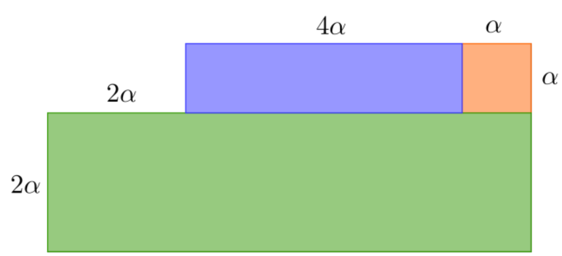
(α) 1

(β) -2

(γ) $\frac{1}{4}$

Παραδείγματα: Πράξεις με πολυώνυμα

- Να βρείτε αλγεβρικές παραστάσεις που να εκφράζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του πράσινου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.



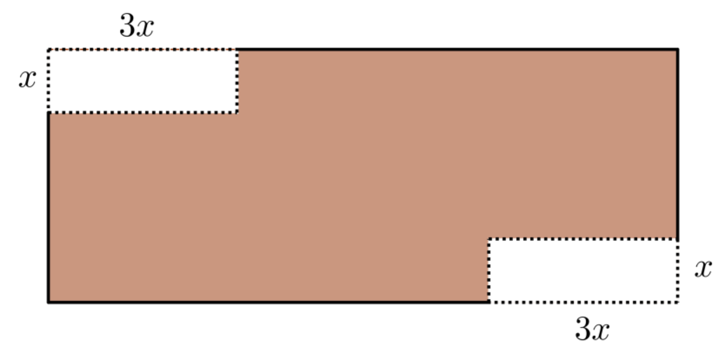
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις;
- Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

Οργανώνω τα πολυώνυμα, ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά.

Παράδειγμα: Ένας ξυλουργός έχει ένα κομμάτι ξύλο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους α και πλάτους β. Θέλει να κόψει από δύο γωνίες του ξύλου ένα κομμάτι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $3x$ και x, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να βρείτε μία αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν του εναπομείναντος ξύλου.

(β) Αν $\alpha = 10\ cm$, $\beta = 4\ cm$ και $x = 1\ cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του εναπομείναντος ξύλου.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

• Να συμπληρώσετε το πιο κάτω μαγικό τετράγωνο, ώστε το άθροισμα οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια να είναι το ίδιο.

<table>
<tr><td>$4x^2+1$</td><td>$2x-5x^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>$-3x^2+4x-1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x^2+x-6</td><td></td><td></td></tr>
</table>

• Αν $A(x)=x^2-5x+4$ και $B(x)=x-1$, να υπολογίσετε:

(α)$A(x)\cdot B(x)$

(β)$3\cdot A(x)-2x\cdot B(x)$

(γ) $[B(x)]^2$

(δ)$A(x):[B(x)+1]$

</td>
<td>

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Με ποιο τρόπο μπορώ να συνδέσω το σχήμα με την αντίστοιχη αλγεβρική παράσταση του εμβαδού;
- Ποιες ιδιότητες των πράξεων χρησιμοποιώ, για να υπολογίσω το εμβαδόν του σχήματος;

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- **Α5.12 Μετασχηματί-ζουν αλγεβρικές παραστάσεις ως**

</td>
<td>

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Εξίσωση α’ Βαθμού

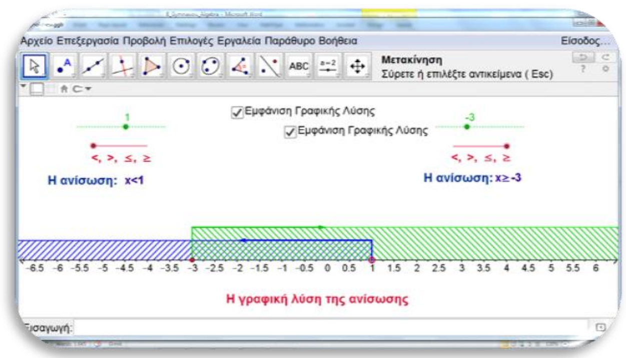
✓ Επίλυση Εξίσωσης α’ Βαθμού

</td>
<td>

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

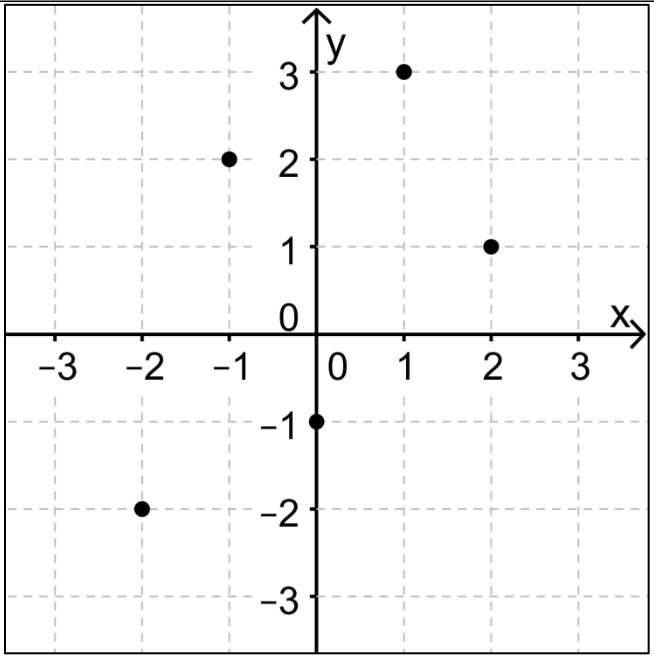
Χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα κτλ), για να αναπαραστήσω καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

</td>
</tr>
</table>

προς μια μεταβλητή. • **Α4.12 Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώ-ντας ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.** • **Α5.10 Επιλύουν και διερευνούν γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις μιας μεταβλητής, αναπαριστούν γραφικά τις λύσεις τους και αναγνωρίζουν τις**	**Νέες Έννοιες:** ✓ **Διερεύνηση Εξίσωσης α’ Βαθμού** ονομάζουμε τη διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε το πλήθος των λύσεών της. ✓ **Ανίσωση** ονομάζεται η ανισότητα που περιέχει μεταβλητή. ✓ **Λύση Ανίσωσης** ονομάζεται κάθε τιμή της μεταβλητής που επαληθεύει την ανίσωση. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν πότε μία εξίσωση έχει μοναδική λύση, δεν έχει λύση ή έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό. Δίνεται έμφαση στη διαδικασία διερεύνησης εξίσωσης α’ βαθμού με μία μεταβλητή και στη σημασία της • να επιλύουν μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές ως προς μία συγκεκριμένη μεταβλητή • χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης ανισώσεων πρώτου βαθμού, τονίζοντας τη χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων • να αναπαριστούν το σύνολο των λύσεων μίας ανίσωσης α’ βαθμού ή το σύνολο των κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων α’ βαθμού • να χρησιμοποιούν ανισώσεις α’ βαθμού στην επίλυση προβλήματος	**Παραδείγματα:** (α) Η Φλωρεντία θέλει να ξοδέψει το πολύ 60 ευρώ για αγορά ρουχισμού. Έχει αποφασίσει ότι θα αγοράσει ένα παντελόνι που κοστίζει 22 ευρώ, ενώ τα υπόλοιπα χρήματά της θα τα ξοδέψει για να αγοράσει μπλούζες. Κάθε μπλούζα κοστίζει 8 ευρώ. Γράψετε μιαν ανίσωση που να περιγράφει τον αριθμό των μπλουζών που είναι δυνατόν να αγοράσει η Φλωρεντία με το πιο πάνω ποσό χρημάτων. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς θα αναπαραστήσω τα δεδομένα του προβλήματος;* • *Πώς θα βοηθούσε αν αναπαραστήσω γραφικά τις λύσεις της ανίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα;* (β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων $x < 1$ και $x \geq -3$.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς με βοηθά η γραφική αναπαράσταση των λύσεων των ανισώσεων να βρω το σύνολο των κοινών λύσεών τους;*

ιδιότητές τους. • **Α4.14 Επιλύουν και κατασκευάζουν αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα ρουτίνας και διαδικασίας.**	**Παράδειγμα: Διερεύνηση εξίσωσης α' βαθμού** • Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν μία λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις. (α)$2x+7=x-2$ (β)$2(x-1)=2x+11$ (γ)$\frac{3x+11}{3}-\frac{2(2-x)}{4}=\frac{9x+16}{6}$ **Παράδειγμα: Μετασχηματισμός τύπου** • Να επιλύσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς την μεταβλητή που σημειώνεται μέσα στην παρένθεση. (α)$3x-5y=2 \quad (y)$ (β)$E=\frac{(\beta+B)\cdot\upsilon}{2} \quad (B)$ **Παράδειγμα: Επίλυση ανίσωσης α' βαθμού** • Να επιλύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις: • $-2x<4$ • $3x+5\geq 2x$ **Παραδείγματα: Αναπαράσταση των λύσεων μιας ανίσωσης α' βαθμού** • Να αναπαραστήσετε τη λύση της ανίσωσης $x\geq 3$ λεκτικά, γραφικά και συμβολικά. • Να αναπαραστήσετε το σύνολο των κοινών λύσεων (αν υπάρχουν) των ανισώσεων $x<4$ και $x\geq -1$ λεκτικά, γραφικά και συμβολικά.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Μία επιχείρηση ενοικιάζει μικρές βάρκες σε τουρίστες που ασχολούνται με το ψάρεμα. Κάθε βάρκα μπορεί να μεταφέρει μέχρι και 1200 kg μάζας (άνθρωποι, εξοπλισμός). Υποθέτουμε ότι η μέση μάζα των ανθρώπων είναι 80 kg. Σε κάθε βάρκα υπάρχει, επίσης, εξοπλισμός μάζας 100 kg και κάθε άτομο στη βάρκα έχει μαζί του ατομικό εξοπλισμό μάζας 10 kg. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορεί να μεταφέρει μία τέτοια βάρκα με ασφάλεια; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;* • *Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;* • *Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω;* • *Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω;* • *Είναι η απάντησή μου λογική;* • *Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος με τη χρήση ανισώσεων α’ βαθμού
Μία εταιρεία κινητής τηλεφωνίας προσφέρει δύο «πακέτα» μηνιαίας συνδρομής.
<table>
<tr><th>«Πακέτο»</th><th>Πάγια Μηνιαία Χρέωση</th><th>Χρέωση ανά Λεπτό Ομιλίας</th></tr>
<tr><td>A</td><td>€5,00</td><td>€0,10</td></tr>
<tr><td>B</td><td>€15,00</td><td>€0,05</td></tr>
</table>
Να εξετάσετε πόσα τουλάχιστον λεπτά ομιλίας ανά μήνα πρέπει να συμπληρώνει ένας πελάτης για να τον συμφέρει να επιλέξει το «πακέτο B».
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
Α4.4 Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο πεδίο τιμών και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και
</td>
<td>
Προαπαιτούμενες Γνώσεις:
✓ Έννοια Αντιστοιχίας
✓ Έννοια Συνάρτησης
✓ Γραφική Παράσταση Συνάρτησης
Νέες Έννοιες:
✓ Κλίση ευθείας είναι ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής Δy, (από ένα σημείο A σε ένα σημείο B της ευθείας), προς την οριζόντια μεταβολή Δx.
</td>
<td>
ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων
Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.
Παράδειγμα: Δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης. Η Γεωργία ισχυρίζεται ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι το $[-2, 3]$.
</td>
</tr>
</table>

εξαρτημένης μεταβλητής. • **Α3.6 Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν το γενικό τύπο συναρτήσεων.** • **Α4.6 Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, με ή χωρίς τεχνολογία, σχεδιάζοντας σημεία σε σύστημα αξόνων.** • **Α5.3 Αναγνωρίζουν και επεξηγούν πότε μια λεκτική έκφραση, ένας**	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές • να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης και να μπορούν να βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της. Δίνεται έμφαση στη διάκριση ανάμεσα σε αντιστοιχία και συνάρτηση. Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίζουν το πότε μια αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση, να βρίσκουν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών μίας συνάρτησης • να χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις για την έννοια της συνάρτησης με: – βελοειδές διάγραμμα – με γράφημα – με τη χρήση τύπου – με πίνακα τιμών – με λεκτική διατύπωση ή συμβολικά – με γραφική παράσταση • να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση μίας ευθείας και να ελέγχουν κατά πόσο ένα σημείο ανήκει σε αυτήν. Δίνεται έμφαση στην εύρεση των συντεταγμένων σημείων που ανήκουν στη γραφική παράσταση μίας ευθείας, στην ορθή τοποθέτησή τους σ’ ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και στην κατασκευή της αντίστοιχης γραφικής παράστασης ευθείας.	 (α) Να ελέγξετε κατά πόσο η Γεωργία έχει δώσει τη σωστή απάντηση. (β) Αν διαφωνείτε να αντικρούσετε τον ισχυρισμό της και να δώσετε τη δική σας απάντηση. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς ελέγχω την ορθότητα της απάντησης;* • *Πώς θα μπορούσα να παρουσιάσω ένα αντιπαράδειγμα;* • *Τι είναι το ίδιο και τι είναι διαφορετικό στο αντιπαράδειγμα που δίνω σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα;*

πίνακας τιμών ή μια γραφική παράσταση αναπαριστούν γραμμική σχέση.

- **Α4.7 Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και ελέγχουν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην ευθεία.**
- **Α5.4 Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και διερευνούν τη σημασία των παραμέτρων α**

- να διερευνήσουν (με τη χρήσης λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας) τη σημασία των παραμέτρων α και β της συνάρτησης f με εξίσωση $f(x) = \alpha x + \beta$
- να κατασκευάζουν την εξίσωση μίας ευθείας:
  - που περνά από δύο σημεία
  - της οποίας είναι γνωστή η γραφική παράσταση
- να ορίζουν και να υπολογίζουν την κλίση ευθείας

Παράδειγμα: Έννοια της συνάρτησης

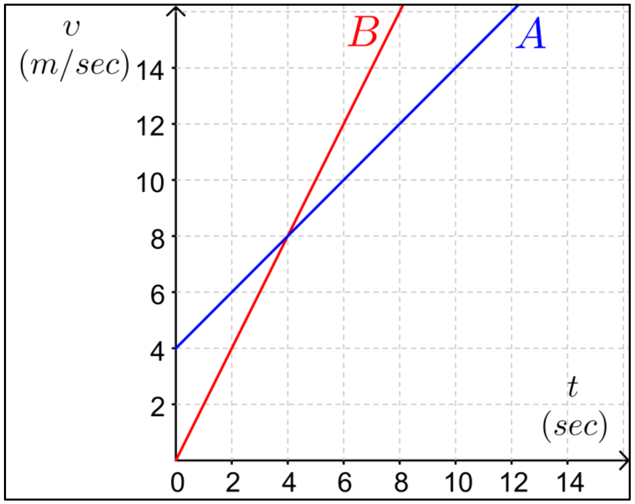
- Να εξετάσετε κατά πόσο ο πιο κάτω πίνακας τιμών ορίζει συνάρτηση με πεδίο ορισμού τα ονόματα των υπαλλήλων μιας εταιρείας και πεδίο τιμών τον μηνιαίο μισθό τους.

Όνομα Υπαλλήλου	Μηνιαίος Μισθός
Κώστας	€1500
Γιάννης	€950
Μαρία	€1100
Γιώργος	€1100
Ελένη	€900
Παναγιώτα	€1250

ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων

Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (μία γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο) για να εξερευνώ και να καταλαβαίνω τον κόσμο.

Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου δύο ποδηλάτων A και B.

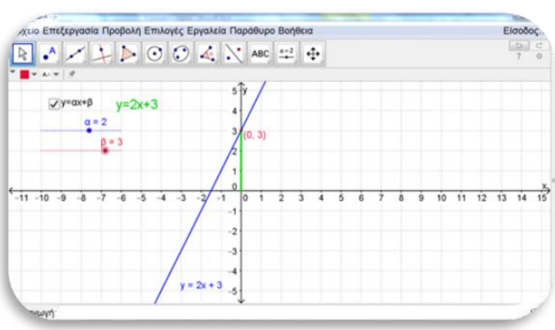


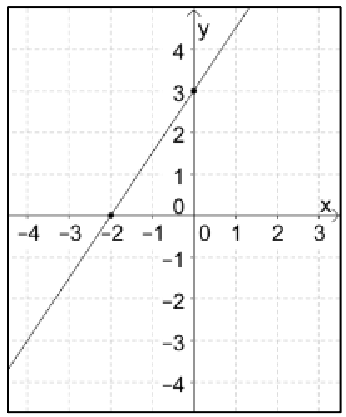
(α) Να βρείτε (με τη χρήση πίνακα τιμών) τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο για κάθε ποδήλατο ξεχωριστά.

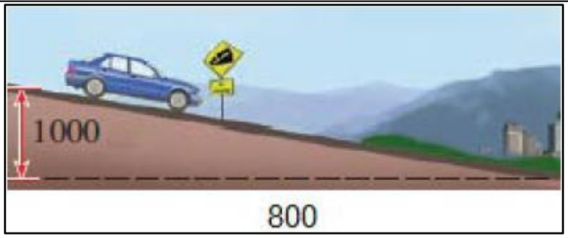
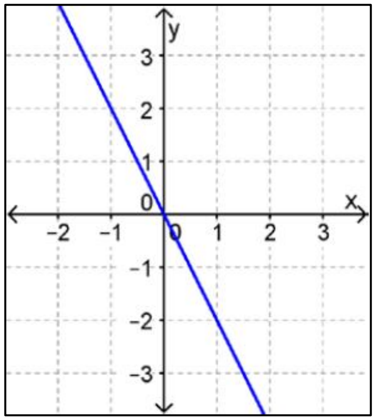
(β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι σχέσεις που βρήκατε είναι γραμμικές.

(γ) Ποια είναι η σημασία της κλίσης της κάθε ευθείας;

(δ) Σε ποια χρονική στιγμή τα δύο ποδήλατα έχουν την ίδια ταχύτητα;

και β της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ (χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας). • **Α5.6 Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας και την αναπαριστούν γραφικά, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.** • **Α4.8 Κατανοούν την έννοια της κλίσης ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.** • **Α4.9 Μοντελοποιούν και περιγράφουν**	**Παραδείγματα: Πολλαπλές αναπαραστάσεις συναρτήσεων** • Να αναπαραστήσετε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{-2, 0, 2\}$ και πεδίο τιμών το σύνολο $B = \{-1, 3\}$ *(Βελοειδές Διάγραμμα, Γράφημα, Με τη χρήση τύπου, Με πίνακα τιμών, Περιγραφικά-Συμβολικά, Με γραφική παράσταση).* **Παράδειγμα: Κατασκευή γραφικής παράστασης ευθείας** Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = 2x + 3$ και να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $A(1, 5)$, $B(0, 2)$, $\Gamma(-1, -2)$ και $\Delta(-2, 0)$ ανήκουν στη γραφική παράστασή της. **Παράδειγμα: Κατανόηση του ρόλου των α και β στη συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$** Να μεταβάλετε τις τιμές των δρομέων α και β και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις τους για τη σημασία των αντίστοιχων παραμέτρων. 	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιες πληροφορίες μπορώ να αντλήσω από την κάθε ευθεία;* • *Θα ήταν χρήσιμο σε αυτήν την περίπτωση να χρησιμοποιήσω κατάλληλο εφαρμογίδιο;*

μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα τιμών ή σε γραφική παράσταση. • **Α5.8 Επιλύουν γραφικά ή με άλλο κατάλληλο τρόπο προβλήματα με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις.** • **Α5.15 Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων δύο μεταβλητών (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών) και**	**Παραδείγματα: Εύρεση εξίσωσης ευθείας** • Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από: (α)$(0,1)$ και $(2,3)$ (β)$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ και $(4,-1)$ • Να βρείτε την εξίσωση ευθείας της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται πιο κάτω.  **Παράδειγμα: Εύρεση της κλίσης ευθείας** • Να βρείτε την κλίση ευθείας σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις: (i) $y=3x+2$, $y=-1$ και $x=4$	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* **Παράδειγμα:** Το 2000 ο πληθυσμός της Κύπρου ήταν 635000. Κατά τη διάρκεια των ετών 2000 και 2008, ο πληθυσμός αυξανόταν κατά 35000 κατοίκους κάθε χρόνο. (α) Να γράψετε μία εξίσωση η οποία παρουσιάζει τον πληθυσμό (P) συναρτήσει του χρόνου (t), όπου $t=0$ θεωρείται το έτος 2000. (β) Να χρησιμοποιήσετε αυτό το μοντέλο, για να εκτιμήσετε τον πληθυσμό της Κύπρου για το έτος 2032. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Τι παρατηρώ για τη σχέση που συνδέει τον πληθυσμό (P) της Κύπρου με τον χρόνο (t);* • *Με ποιο τρόπο μπορώ να χρησιμοποιήσω το μοντέλο αυτό, για να εκτιμήσω τον πληθυσμό (P) της Κύπρου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή;*

<table>
<tr>
<td>τα εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων καθημερινής ζωής.</td>
<td>(ii) 
(iii) </td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">ΑΡΙΘΜΟΙ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>

- **Αρ5.25 Εκφράζουν την τετραγωνική ρίζα αριθμών κατά προσέγγιση, υπολογίζουν παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών.**
- **Αρ5.12 Κατανοούν την αριθμητική και γεωμετρική σημασία της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας ρητού αριθμού και αποδεικνύουν την αρρητότητα των τετραγωνικών και κυβικών ριζών των ρητών που δεν είναι**

</td>
<td>

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Δύναμη με εκθέτη Φυσικό Αριθμό
✓ Προτεραιότητα Πράξεων

Νέες Έννοιες:
✓ **Τετραγωνική ρίζα** μη-αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$, λέγεται ο μη-αρνητικός αριθμός β, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.
✓ **Κυβική ή τρίτη ρίζα** μη-αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$, λέγεται ο μη-αρνητικός αριθμός β, ο οποίος όταν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, δίνει τον αριθμό α.

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

- να κατανοήσουν την έννοια της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας, για να υπολογίζουν τετραγωνικές και κυβικές ρίζες
- να υπολογίζουν παραστάσεις με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες
- να εκφράζουν τετραγωνικές και κυβικές ρίζες κατά προσέγγιση

</td>
<td>

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Χρησιμοποιώ την έννοια της τετραγωνικής-κυβικής ρίζας, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παραδείγματα: (α) Οι 121 στρατιώτες ενός λόχου θέλουν να παραταχθούν σε σειρές, οι οποίες θα δημιουργήσουν ένα τετράγωνο σχηματισμό. Πόσες σειρές θα έχει ο σχηματισμός αυτός και πόσοι στρατιώτες πρέπει να υπάρχουν σε κάθε σειρά;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

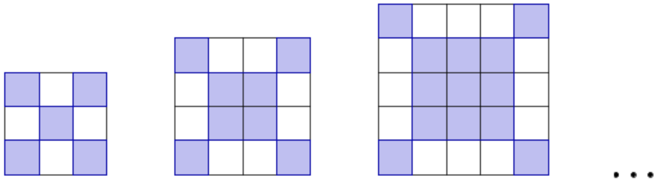
- Πως συνδέεται το πλήθος των στρατιωτών με το είδος του σχηματισμού;
- Ποια έννοια μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;

(β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις μίας πισίνας σε σχήμα κύβου που έχει όγκο 625 m^3.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις διαστάσεις της πισίνας με τον όγκο της;
- Ποια έννοια μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να βρω την απάντηση;

</td>
</tr>
</table>

τετράγωνα ή κύβοι ρητών αριθμών. • **Αρ6.11 Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.** • **Αρ4.14 Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με ρητούς αριθμούς, ποσοστά, ρίζες και δυνάμεις και ελέγχουν τη λογικότητα της απάντησής τους.** • **Αρ5.13 Κατανοούν το δεκαδικό ανάπτυγμα των ρητών αριθμών και αναγνωρίζουν τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών από τη μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός τους.**	• να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των ριζών, για να υπολογίζουν την τιμή παραστάσεων με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες • να επιλύουν προβλήματα με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες • να αναγνωρίζουν κατά πόσο ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος από την μορφή του δεκαδικού αναπτύγματός του **Παράδειγμα: Υπολογισμός τετραγωνικής και κυβικής ρίζας** • Να υπολογίσετε τις ρίζες: Α. $\sqrt{49}$ Β. $\sqrt{(-4)^2}$ Γ. $\sqrt[3]{64}$ Δ. $\sqrt[3]{0{,}001}$ **Παράδειγμα: Υπολογισμός παραστάσεων με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες** • Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: (α) $A = 2\sqrt{16} + \sqrt[3]{6^3} - \left(\sqrt{5}\right)^2$ (β) $B = \sqrt{7 + \sqrt[3]{\sqrt{64}}}$ (γ) $\Gamma = \sqrt[3]{(-1)^2 + 7 \cdot (-3)^2}$	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* **Παράδειγμα:** (α) Να βρείτε το πλήθος των σκιασμένων τετραγώνων σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα του μοτίβου. (β) Ποιο σχήμα θα έχει 229 σκιασμένα τετράγωνα;  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Τι παρατηρώ για τη σχέση που συνδέει το πλήθος των σκιασμένων τετραγώνων με το μήκος της πλευράς του κάθε σχήματος στο πιο πάνω μοτίβο; • Με ποιο τρόπο μπορώ να χρησιμοποιήσω το μοντέλο αυτό, για να απαντήσω στο ερώτημα (β);

	Παράδειγμα: Έκφραση τετραγωνικής ρίζας αριθμού κατά προσέγγιση • Να υπολογίσετε με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος $12\ cm$, πλάτος $5\ cm$ και ύψος $8cm$. **Παράδειγμα: Υπολογισμός παραστάσεων με τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών** • Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: (α) $A = \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} - \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ (β) $B = (4\sqrt{27}) : (2\sqrt{3})$ (γ) $\Gamma = \frac{\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{81}}$ **Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος με τετραγωνική και κυβική ρίζα** • Να συγκρίνετε την ακμή ενός κύβου με όγκο $125a^3$ με την ακμή ενός δεύτερου κύβου με εμβαδόν επιφάνειας $96a^2$. **Παράδειγμα: Αναγνώριση ρητών και άρρητων αριθμών** • Αν $a = 2, \beta = 3$ και $\gamma = 5$, να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμοί είναι ρητοί ή άρρητοι: (α) $\sqrt{\beta}$ (β) $\sqrt{\gamma - 1}$ (γ) $\sqrt[3]{\beta^3 + \gamma}$ (δ) $0{,}0\overline{\alpha\beta\gamma}$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις: (α) $\sqrt{a^2} = a, a \geq 0$ (β) $\sqrt{a^2 + \beta^2} = a + \beta$ (γ) $\sqrt{(-5)^2} = -5$ (δ) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = 2$ (ε) $\sqrt[3]{51} = 17$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ για να απαντήσω τις πιο πάνω ερωτήσεις; • Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτήν τη δραστηριότητα; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;

<table>
<tr>
<td>

- **Αρ5.22 Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών.**

</td>
<td>

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Εξίσωση-Ανίσωση α’ Βαθμού

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

- να κατανοήσουν κατά πόσο μία εξίσωση-ανίσωση α’ βαθμού έχει λύσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών

Παράδειγμα: Επίλυση εξίσωσης-ανίσωσης α’ βαθμού στο σύνολο των ρητών αριθμών

- Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις-ανισώσεις στο σύνολο των ρητών αριθμών:

(α)$2x = 3$

(β)$\sqrt{5} \cdot x - 2 = 7$

(γ) $2(3x - 7) = 6x - 2$

(δ)$\frac{x+2}{3} \leq \frac{2x+4}{6}$

</td>
<td>

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Ο αριθμός των μαθητών ενός Γυμνασίου, όταν διαιρεθεί με το 17 αφήνει υπόλοιπο 7. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου, αν γνωρίζουμε ότι είναι λιγότεροι από 398 αλλά περισσότεροι από 364.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς μπορώ να αναπαραστήσω τα δεδομένα του προβλήματος;*
- *Πώς θα βοηθούσε αν αναπαραστήσω γραφικά τις λύσεις των ανισώσεων που περιγράφει το πρόβλημα;*
- *Πώς με βοηθά η γραφική αναπαράσταση των λύσεων των ανισώσεων να βρω το σύνολο των κοινών λύσεών τους;*

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- **Αρ5.6 Διακρίνουν πότε δύο ποσά είναι ευθέως ανάλογα και πότε αντιστρόφως ανάλογα, με τη χρήση της αναλογίας και του ποσοστού, και εφαρμόζουν τα**

</td>
<td>

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Λόγοι, Αναλογίες, Ποσοστά

Νέες Έννοιες:

✓ **Ευθέως ανάλογα ποσά** ονομάζονται δύο ποσά των οποίων οι αντίστοιχες τιμές έχουν πάντα τον ίδιο λόγο.

✓ **Αντιστρόφως ανάλογα ποσά** ονομάζονται δύο ποσά των οποίων το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους

</td>
<td>

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: (α) Ο Κώστας θέλει να αγοράσει αναψυκτικά. Στην υπεραγορά υπάρχουν οι εξής δύο προσφορές:

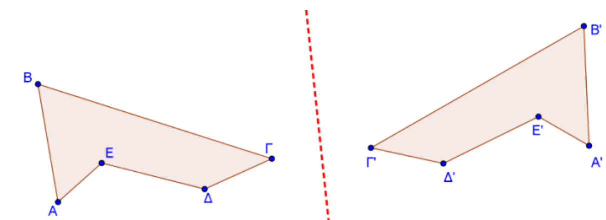
A: Κάθε αναψυκτικό κοστίζει 23 σεντ

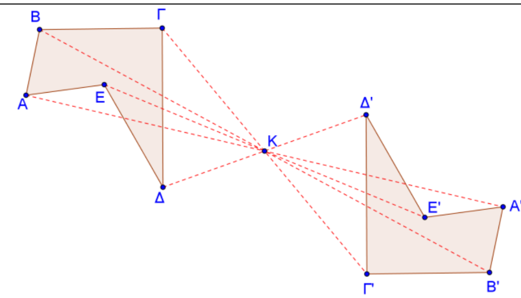
B: Κάθε εξάδα αναψυκτικών κοστίζει 120 σεντ

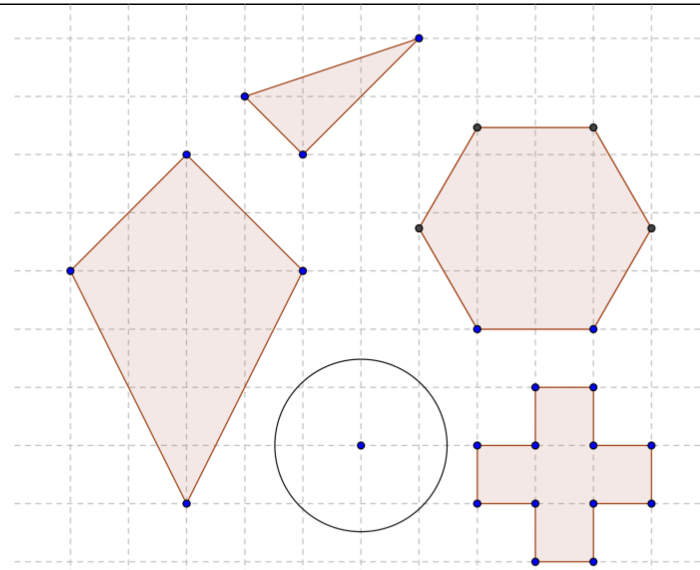
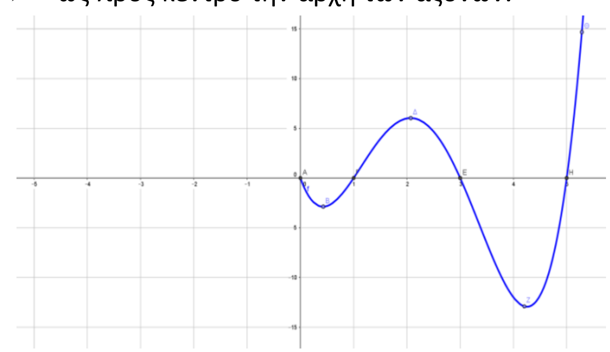
</td>
</tr>
</table>

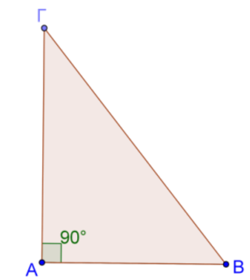
ανάλογα ποσά στην επίλυση προβλημάτων. • **Αρ5.24 Επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά και προβλήματα ποσοστών (τόκου, φορολογίας, κέρδους και ζημιάς, κτλ.).**	είναι πάντα σταθερό. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν την έννοια των ευθέως ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να διακρίνουν κατά πόσο δύο ποσά είναι ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα • να επιλύουν προβλήματα με ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά. **Παράδειγμα: Ευθέως ανάλογα-Αντιστρόφως ανάλογα ποσά** • Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ποσά είναι ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (α) Η αμοιβή ενός ωρομίσθιου εργάτη και ο χρόνος εργασίας του. (β) Η μέση ταχύτητα ενός αυτοκινήτου και ο απαιτούμενος χρόνος για την κάλυψη της απόστασης ανάμεσα στις πόλεις A και B. (γ) Η περίμετρος ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του. (δ) Το πλήθος των σελίδων ενός βιβλίου που διαβάζει ένα άτομο και ο απαιτούμενος χρόνος ανάγνωσης του βιβλίου.	Ποια από τις δύο προσφορές του συμφέρει, για να αγοράσει 12 αναψυκτικά; (β) Για να μπογιατιστεί μία πολυκατοικία τεσσάρων ορόφων, χρειάζεται να εργαστούν για 30 ημέρες 4 άτομα. Πόσοι εργάτες χρειάζονται να προστεθούν ακόμη, για να τελειώσει το έργο 10 ημέρες νωρίτερα; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;* • *Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους;* • *Ποια στρατηγική θα χρησιμοποιήσω για να το λύσω;* • *Ποια άλλη στρατηγική θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω;* • *Είναι η απάντησή μου λογική;* • *Πώς αξιολογώ την λογικότητα της απάντησής μου;*

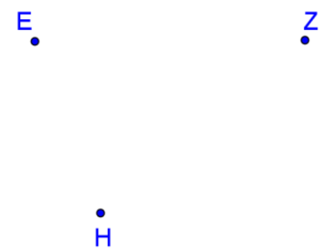
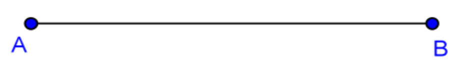
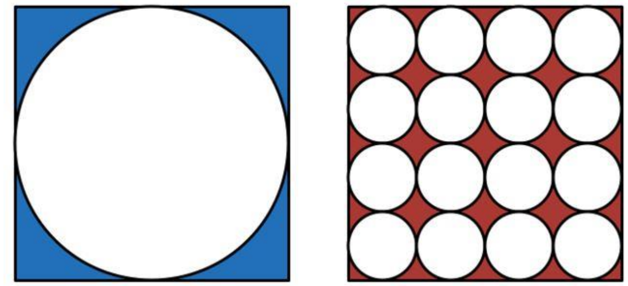
	Παραδείγματα: Επίλυση προβλήματος με ευθέως ανάλογα-αντιστρόφως ανάλογα ποσά • Ένας εργάτης αμείβεται με €425 για 17 ώρες εργασίας. Πόσα χρήματα θα πάρει για 29 ώρες εργασίας; • Ένα αυτοκίνητο αναχωρεί από την πόλη A στις $08:00$ και φτάνει στην πόλη B στις $10:30$. Η μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του ήταν 90 km/h. Ποια θα έπρεπε να ήταν η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου, αν ο οδηγός ήθελε να είναι στην πόλη B μισή ώρα νωρίτερα;	

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ		
Δείκτες Επιτυχίας	**Δείκτες Επάρκειας**	
	Επίπεδα δραστηριοτήτων	**Μαθηματικές Πρακτικές**
• **Γ4.16 Κατασκευάζουν πολύγωνα και σχέδια με πολλούς άξονες συμμετρίας ή σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο.** • **Γ5.20 Ορίζουν και κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα (σχήματα με άξονα συμμετρίας, σχήματα συμμετρικά ως προς ευθεία, σχήματα με κέντρο συμμετρίας).** • **Γ4.5 Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες των τριγώνων, των τραπεζίων, των παραλληλογράμμων, των πολυγώνων και του κύκλου.**	**Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ✓ Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου **Νέες έννοιες** ✓ **Συμμετρικό ενός σημείου $\boldsymbol{A}$** ως προς O ονομάζεται το σημείο A', που ανήκει στην ευθεία AO με $AO = OA'$. Τα σημεία A και A'είναι συμμετρικά με **κέντρο συμμετρίας** το O. ✓ **Συμμετρικό ενός σχήματος Σ** ως προς σημείο O ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ ως προς O. ✓ **Συμμετρικό του σημείου $\boldsymbol{M}$** ως προς μια ευθεία ε ονομάζεται το σημείο M', όταν τα M και M' ισαπέχουν από την ευθεία και $MM' \perp \varepsilon$. Τότε λέμε ότι τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε. ✓ **Συμμετρικό ενός σχήματος Σ** ως προς μια ευθεία ε ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ ως προς την ευθεία ε. ✓ **Άξονας συμμετρίας ενός σχήματος** είναι μια ευθεία ε,	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κατασκευάζω σχήματα, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες.* **Παραδείγματα:** • Στο εφαρμογίδιο *«symmetria1.ggb»* μας δίνονται δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ και $A'B'Γ'Δ'Ε'$, Το σχήμα $ΑΒΓΔΕ$ μπορεί να μεταβληθεί, μετακινώντας μία από τις κορυφές του. Να παρατηρήσετε τη σχέση μεταξύ των δύο σχημάτων, μεταβάλλεται το σχήμα $ΑΒΓΔΕ$.  • Στο εφαρμογίδιο *«symmetria2.ggb»* να κάνετε ανάλογες παρατηρήσεις για τα δύο σχήματα $ΑΒΓΔΕ$ και $A'B'Γ'Δ'Ε'$

• **Γ5.8 Αναγνωρίζουν, κατασκευάζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο), αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους στη λύση προβλημάτων.** • **Γ3.8 Διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος και συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.** • **Γ4.12 Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων στην επίλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων.** • **Γ5.7 Ορίζουν και κατασκευάζουν τον κύκλο, κυκλικό δίσκο και τα στοιχεία τους και διερευ-**	ως προς την οποία το συμμετρικό του σχήματος συμπίπτει με το ίδιο το σχήμα. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν, κατά πόσο ένα σχήμα έχει άξονες συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας. **Παραδείγματα: Αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων ως προς κέντρο και ως προς άξονα** • Να αναγνωρίσετε και να δικαιολογήσετε αν υπάρχει συγκεκριμένο είδος συμμετρίας στην πιο κάτω φωτογραφία.  • Στα πιο κάτω σχήματα να αναφέρετε κατά πόσο, υπάρχουν άξονες συμμετρίας (και να τους καταμετρήσετε) ή κέντρο συμμετρίας και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.	 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Τι παρατηρείτε για τα αντίστοιχα μήκη των πλευρών των δύο πολυγώνων;* • *Τι παρατηρείτε για το είδος και τον θέση του κάθε σχήματος;* **ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με άλλους συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα στο πλαίσιο του προβλήματος.* **Παραδείγματα:** • Ποιο τετράπλευρο ονομάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; • Ποιες ιδιότητες παρουσιάζουν οι πλευρές και γωνίες ενός παραλληλογράμμου; *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποιες ιδιότητες προκύπτουν από τον ορισμό του*

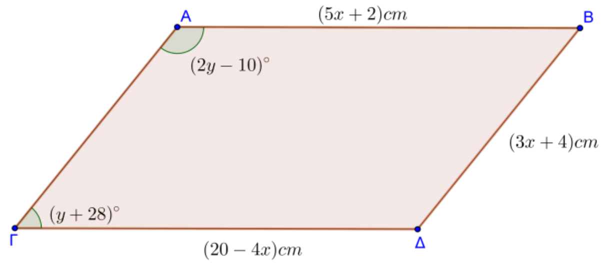
νούν τις σχέσεις μεταξύ τους (κύκλος ,κυκλικός δίσκος, ακτίνα κύκλου, χορδή κύκλου, απόστημα χορδής, κυκλικός τομέας, κυκλικό τμήμα, σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, σχετικές θέσεις δύο κύκλων, μέτρο τόξου και γωνίας, επίκεντρες γωνίες, εγγεγραμμένες γωνίες, γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη). • **Γ5.1 Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.** • **Γ3.9 Ελέγχουν την εγκυρότητα βασικών γεωμετρικών θεωρημάτων ή προτάσεων, χρησιμοποιώντας επαγωγικό συλλογισμό.**	 • Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου, αποτελεί κέντρο συμμετρίας του. **Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ **Εντός εναλλάξ, εντός και επί τα αυτά, εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνίες (**όταν δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3) ✓ **Πυθαγόρειο Θεώρημα** ✓ **Παραλληλόγραμμο (κέντρο παραλληλογράμμου και ιδιότητες)** ✓ **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (ή απλά ορθογώνιο) και Ιδιότητες ορθογωνίου Παραλληλογράμμου**	*παραλληλογράμμου;* **ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και ιδιότητες, για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma = 10\ cm$ και $B\Delta = 8\ cm$ για να κατασκευάσετε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε κατά πόσο το παραλληλόγραμμο που κατασκευάσατε είναι μοναδικό. Μπορεί με τα ίδια δεδομένα το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να γίνει ορθογώνιο; *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποιες ιδιότητες έχουν οι διαγώνιοί του παραλληλογράμμου και του ορθογωνίου;* • Να σχεδιάσετε σε ξεχωριστό σχήμα το συμμετρικό του πιο κάτω σχήματος ➢ ως προς τον άξονα των τετμημένων (Ox) ➢ ως προς τον άξονα των τεταγμένων (Oy) ➢ ως προς κέντρο την αρχή των αξόνων. 

• **Γ5.15.Επεξηγούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες τριγώνων και τετραπλεύρων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.** • **Γ5.9 Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και επεξηγούν τις οπτικές αναπαραστάσεις αποδείξεών του.**	✓ **Ρόμβος και Ιδιότητες Ρόμβου** ✓ **Τετράγωνο και Ιδιότητες τετραγώνου** **Νέες Έννοιες** ✓ **Τραπέζιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες. ✓ **Βάσεις** του τραπεζίου είναι οι παράλληλες πλευρές του ✓ **Ορθογώνιο τραπέζιο** είναι το τραπέζιο που έχει μία ορθή γωνία. ✓ **Ισοσκελές τραπέζιο** είναι το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες. ✓ **Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου** ➢ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες. ➢ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες. • Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές, να χρησιμοποιούν τους ορισμούς για να μπορούν να κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, ειδικά παραλληλόγραμμα και τραπέζια (Να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην διάταξη των γραμμάτων με την οποία εμφανίζεται ένα σχήμα). • Οι μαθητές, να κατανοήσουν τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων, των ειδικών παραλληλογράμμων και των τραπεζίων για να μπορούν να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων. • Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό και	*Απαντώ στην ερώτηση:* • *Γνωρίζω τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες σε ένα σχήμα που παρουσιάζει αξονική και κεντρική συμμετρία;* • Να κατασκευάσετε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, $ΑΒΔΓ$, όταν δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ, Α = 90^{\circ}$.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Γνωρίζω τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;* **ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Κατανοώ τις ποσότητες και τις σχέσεις μεταξύ τους και χρησιμοποιώ ευέλικτα γνωστές ιδιότητες για να επιλύσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Από ένα τετράγωνο αφαιρούμε ένα κύκλο. Από το ίδιο τετράγωνο, σε άλλο σχήμα αφαιρούμε 16 ίσους κύκλους όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα. Να αιτιολογήσετε γιατί τα δύο σκιασμένα εμβαδά είναι ίσα μεταξύ τους. Ποια σχέση

	αντιπαραδείγματα για να ελέγχουν την ορθότητα γεωμετρικών προτάσεων. **Παράδειγμα: Κατασκευή Παραλληλογράμμου** • Να χρησιμοποιήσετε τη θέση των τριών μη συνευθειακών σημείων E, Z, H για να κατασκευάσετε τα παραλληλόγραμμα $EZΘH$ και $ZHIE$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.  • Να εξηγήσετε κατά πόσο με τα τρία σημεία E, Z, H μπορείτε να κατασκευάσετε και πιο ειδικά παραλληλόγραμμα, όπως ορθογώνιο ή ρόμβο. • Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να κατασκευαστεί ορθογώνιο τραπέζιο $EZΘH$ χρησιμοποιώντας τα τρία σημεία E, Z και H. • Να κατασκευάσετε το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, αν δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και να αναφέρετε τα γεωμετρικά όργανα που χρησιμοποιήσατε. 	θα έχουν τα ασκίαστα σχήματα, αν στο δεύτερο σχήμα αφαιρέσουμε διπλάσιο αριθμό κύκλων;  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποιες μεταβλητές μπορώ να θέσω για να απλοποιήσω το πρόβλημα; Πώς συνδέεται το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με τις ακτίνες των κύκλων;* **ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, (κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος) σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** • Να αποδείξετε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς ακέραιο αριθμό δεν μπορεί ποτέ να έχει εμβαδόν που να είναι επίσης ακέραιος αριθμός. • Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με διαστάσεις $8\ cm$ επί $6\ cm$. Να σκιάσετε το χωρίο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου και απέχει συγχρόνως, τουλάχιστον $6\ cm$ από την

Παραδείγματα: Ιδιότητες παραλληλογράμμων

- Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του παραλληλογράμμου $ΑΒΔΓ$.



- Να κατασκευάσετε ρόμβο, αν γνωρίζετε ότι έχει περίμετρο $40\ cm$ και οι διαγώνιοί του είναι άρτιοι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί.
- Να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όταν δίνονται τα τρία από τα τέσσερα σημεία του: $Α(1,2), Β(5,2)$ και $Γ(8,5)$.
- Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $Α(0,0), Β(20,0), Γ(14,8)$ και $Δ(6,8)$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να εξηγήσετε πώς μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του, την περίμετρο του και τις διαγώνιες του.

κορυφή $Α$ και τουλάχιστον $4\ cm$ από την κορυφή $Γ$.

Απαντώ στις ερωτήσεις

- *Ποιο Θεώρημα χρησιμοποιώ για να υπολογίσω το ύψος ενός τριγώνου; Ποιες άλλες ιδιότητες παρουσιάζει το ύψος σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο;*
- *Πώς εντοπίζω εκείνα τα σημεία που απέχουν από ένα συγκεκριμένο σημείο Α, απόσταση ακριβώς $6\ cm$; Ποια σημεία απέχουν περισσότερο από $6\ cm$;*

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα για να ερμηνεύσω ένα πραγματικό πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.

Παράδειγμα:

- Σε νυκτερινή άσκηση ένα άτομο χρησιμοποιώντας πυξίδα, κινείται από ένα αρχικό σημείο $Α$ $2\ Km$ βόρεια προς το σημείο $Β$. Στη συνέχεια κινείται $3\ Km$ ανατολικά προς το σημείο $Γ$, $1\ Km$ νότια προς το σημείο $Δ$ και τέλος $1\ Km$ δυτικά και σταματά στο σημείο $Ε$. Να προσδιορίσετε τη θέση του ατόμου και να υπολογίσετε την απόσταση που βρίσκεται από το αρχικό σημείο που ξεκίνησε.

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Τι στρατηγική μπορώ να χρησιμοποιήσω για να λύσω το πρόβλημα; Ποιο βασικό Θεώρημα εφαρμόζεται στο πρόβλημα;*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Παραδείγματα: Επαγωγικός συλλογισμός (παραδείγματα και αντιπαραδείγματα)

- Να αιτιολογήσετε γιατί
  - ένας ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες ενός παραλληλόγραμμου;
  - ένα τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ρόμβου και όλες τις ιδιότητες του ορθογώνιου;
- Να δώσετε αντιπαραδείγματα που να απορρίπτουν ισχυρισμούς όπως:
  - κάθε ρόμβος είναι και τετράγωνο
  - ένα ορθογώνιο είναι και τετράγωνο.
  - κάθε τετράπλευρο που έχει ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Παραδείγματα: Απόδειξη Πυθαγορείου Θεωρήματος

- Να αιτιολογήσετε γιατί τα πιο κάτω σχήματα μπορούν να μας βοηθήσουν να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

</td>
<td>

ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.

Επεξηγώ την σκέψη μου χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς για να αναπτύξω ισχυρισμούς και να καταλήξω σε συμπεράσματα. Λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.

Παραδείγματα:

- Να εξηγήσετε γιατί το ύψος $ΑΔ$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι άξονας συμμετρίας ενός τριγώνου.
- Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται στο $Ο$ Να αιτιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ *και* $ΓΟΔ$ είναι μεταξύ τους ίσα Ποιο άλλο ζεύγος τριγώνων είναι μεταξύ τους ίσα;

Απαντώ στην ερώτηση

- *Ποια βασική ιδιότητα έχει ο άξονας συμμετρίας, ή το κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος;*

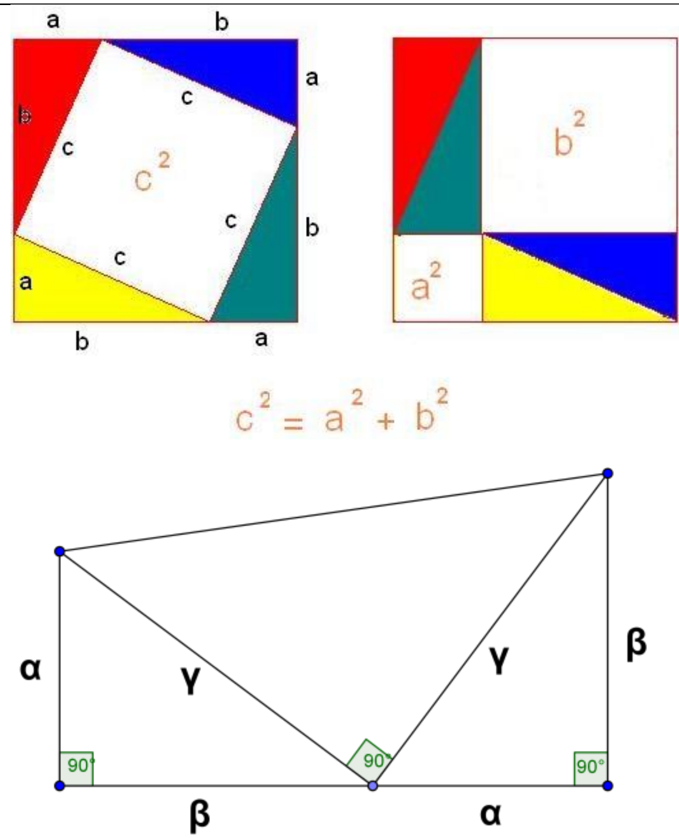
ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

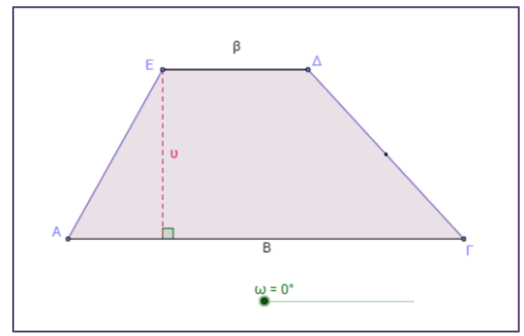
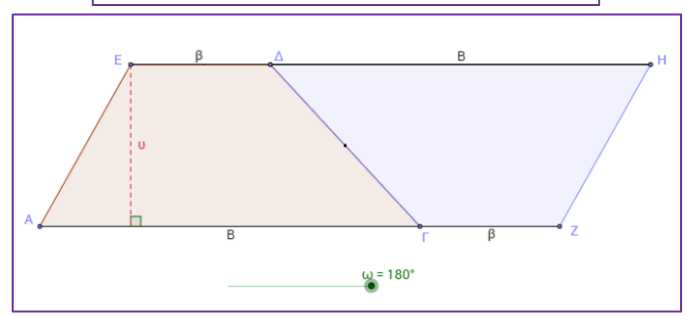
Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και κάνω γενικεύσεις. Ανακαλύπτω σύντομες λύσεις.

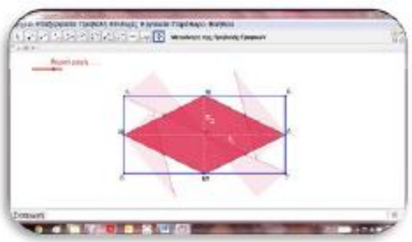
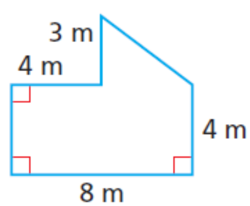
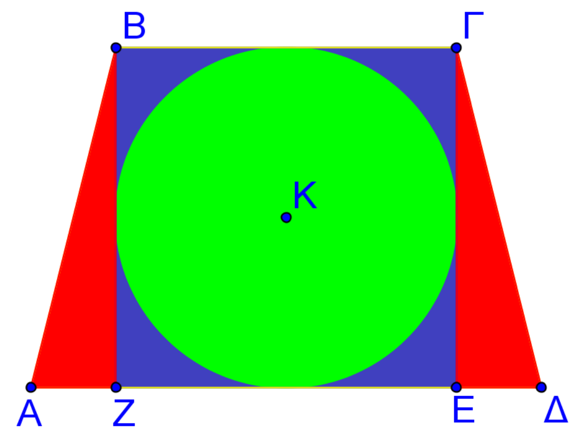
Παραδείγματα: Να ονομάσετε το τετράπλευρο που,

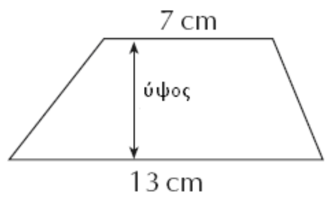
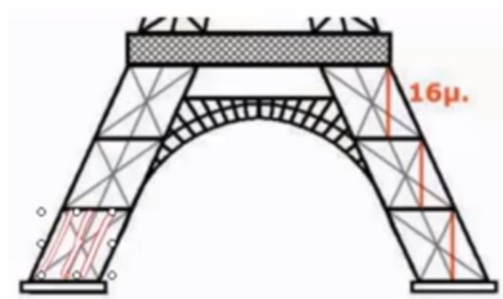
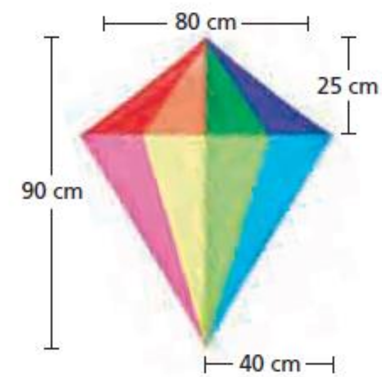
- είναι ρόμβος και ορθογώνιο συγχρόνως
- είναι παραλληλόγραμμο και έχει ίσες διαγώνιους
- είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του

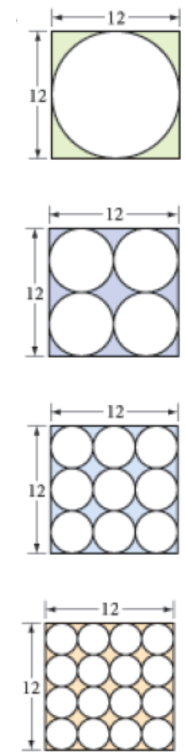
</td>
</tr>
</table>

		τέμνονται κάθετα • οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα και είναι ίσοι μεταξύ τους

ΜΕΤΡΗΣΗ		
Δείκτες Επιτυχίας	**Δείκτες Επάρκειας**	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	**Μαθηματικές Πρακτικές**
• **Μ4.8 Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.** • **Μ5.4 Ανακαλύπτουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τύπους για την εύρεση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, της επιφάνειας και του όγκου στερεών.** • **Μ5.2 Υπολογίζουν**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Τύποι υπολογισμού εμβαδού και περιμέτρου βασικών γεωμετρικών σχημάτων (Τριγώνου, Τετραγώνου, Ορθογωνίου, Παραλληλογράμμου) ✓ Περίμετρος Ρόμβου και Τραπεζίου ✓ Πυθαγόρειο Θεώρημα **Νέες έννοιες:** ✓ **Το εμβαδόν ρόμβου** με διαγωνίους δ_1 και δ_2 είναι ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του. $$E_{ρόμβου} = \frac{\delta_1 . \delta_2}{2}$$ ✓ **Το εμβαδόν τραπεζίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. $$E_{τραπεζίου} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) . \upsilon}{2}$$ Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με στόχο την ανακάλυψη και διαισθητική απόδειξη σχέσεων • να ανακαλύψουν τύπους υπολογισμού του εμβαδού και της περιμέτρου επιπέδων σχημάτων	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο) για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.* **Παράδειγμα:** Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο εφαρμογίδιο για να ανακαλύψετε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του τραπεζίου.  

την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο στερεών σχημάτων. • **Μ4.3 Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του τραπεζίου και σύνθετων σχημάτων.** • **Μ5.3 Διερευνούν και εφαρμόζουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων συγκεκριμένων σχημάτων και του εμβαδού ή/και όγκου τους.** • **Μ4.7 Επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν**	• να υπολογίζουν το εμβαδόν και την περίμετρο επίπεδων επιφανειών και σύνθετων σχημάτων **Παράδειγμα: Χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας και ανακάλυψης τύπου υπολογισμού εμβαδού επιπέδων σχημάτων** • Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«B_En3_EmvadoRomvou.ggb»*, για να ανακαλύψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του ρόμβου, χρησιμοποιώντας το μήκος των διαγωνίων του.  **Παραδείγματα: Υπολογισμός εμβαδού και περιμέτρου επιπέδων σχημάτων** • Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του πιο κάτω σχήματος.  	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια εκτίμηση κάνω για να οδηγηθώ στη λύση;* • *Σε τι με βοηθά το εφαρμογίδιο;* **ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω με ακρίβεια μαθηματικές απαντήσεις κατάλληλες σύμφωνα με το πλαίσιο του προβλήματος. Υπολογίζω με ακρίβεια.* **Παράδειγμα:** Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε χρωματισμένης περιοχής, αν το τετράγωνο $ΒΓΕΖ$ έχει πλευρά $8\ m$ και η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι τριπλάσια από την ακτίνα του κύκλου.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε αυτό το πρόβλημα;* • *Ποια σχέση θα χρησιμοποιήσω, για να εξηγήσω πώς θα μπορέσω να βρω τις διαστάσεις του τραπεζίου;*

σχέσεις μεταξύ ακτίνας, διαμέτρου, εμβαδού και περιφέρειας κύκλου. • **Μ5.5 Εφαρμόζουν ιστορικές προσεγγίσεις του π και του εμβαδού σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων.** • **Μ6.7 Υπολογίζουν το εμβαδόν απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών.** • **Μ5.9 Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας**	• Να υπολογίσετε το ύψος του πιο κάτω τραπεζίου, αν το εμβαδόν του είναι ίσο με $100\ cm^2$.  • Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ενός κανονικού εξαγώνου, όταν η περίμετρος του είναι ίση με $120\ cm$. • Η βάση του Πύργου του Άιφελ στο Παρίσι αποτελείται από 6 παραλληλόγραμμα σε καθεμιά από τις τέσσερεις πλευρές του. Αν η βάση κάθε παραλληλογράμμου είναι $12\ m$ και το ύψος $16\ m$, να υπολογίσετε τη συνολική επιφάνεια του μεταλλικού σκελετού που πρέπει να καλυφθεί με προστατευτικό υφασμα για τις ανάγκες βαφής και συντήρησης που θα γίνουν στον Πύργο.  	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Η Φωτεινή θέλει να φτιάξει ένα χαρταετό σύμφωνα με το πιο κάτω σχέδιο. Το ύφασμα που θα χρησιμοποιήσει έχει μάζα $40\ gr$ το τετραγωνικό μέτρο. Αν τα σιδεράκια για την κατασκευή των διαγωνίων έχουν μάζα $20\ gr$ το μέτρο, να υπολογίσετε τη μάζα του χαρταετού.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.* • *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;* • *Τι προσπαθώ να βρω;* • *Εξηγώ τα στάδια από τα οποία πρέπει να περάσω για να φτάσω στη λύση του προβλήματος.*

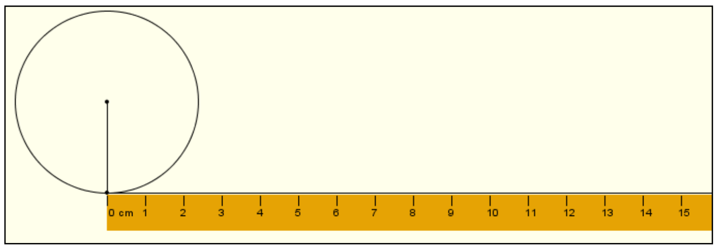
διάφορες στρατηγικές. • **Μ5.10 Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής μεγεθών σε προβλήματα που παρουσιάζονται λεκτικά, αριθμητικά, συμβολικά, γραφικά ή σε πίνακες (γεωμετρικά προβλήματα, φόρος εισοδήματος, πληθωρισμός, συνάλλαγμα, κτλ.).** • **Μ4.9 Κατασκευάζουν γραφικές**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Κύκλος, Κυκλικός δίσκος ✓ Βασικά στοιχεία του κύκλου (Χορδή, Ακτίνα, Διάμετρος) ✓ Επίκεντρη γωνία ✓ Μήκος κύκλου **Νέες έννοιες:** ✓ **Ο άρρητος αριθμός π** είναι ο λόγος του μήκους του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του και είναι πάντοτε σταθερός και προσεγγίζεται με τον αριθμό 3,14. ✓ **Το μήκος τόξου γ** κύκλου ακτίνας R και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ είναι ίσο με $\gamma = \frac{\mu}{360}.2\pi R$. ✓ **Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου** ακτίνας R είναι ίσο με $E = \pi R^2$. ✓ **Το εμβαδόν κυκλικού τομέα** σε κύκλο με ακτίνα και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ είναι ίσο με $E_{\kappa.\tau} = \frac{\mu}{360}.\pi R^2$. Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να επιλύουν προβλήματα τα οποία αφορούν σχέσεις μεταξύ των βασικών στοιχείων του κύκλου (ακτίνας, διαμέτρου), του εμβαδού και της περιφέρειάς του. • να υπολογίζουν προσεγγιστικά τη σταθερά π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη (με τη βοήθεια της τεχνολογίας) σε δραστη-ριότητες. • να υπολογίζουν το εμβαδόν απλών καμπυλόγραμμων και μεικτόγραμμων επιφανειών.	**ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* **Παράδειγμα:** Δίνονται τα πιο κάτω σχήματα. Σε κάθε μια από τις τέσσερεις περιπτώσεις, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους και οι πλευρές του τετραγώνου εφάπτονται σε σημεία του κύκλου. Να υπολογίσετε το ποσοστό του εμβαδού του τετραγώνου καλύπτουν οι κύκλοι σε κάθε σχήμα. 

παραστάσεις και υπολογίζουν την ταχύτητα ή την απόσταση κινητών σε ορισμένο χρονικό διάστημα.

- **Μ5.11 Κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις σε προβλήματα κίνησης.**

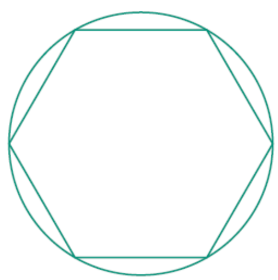
Παραδείγματα: Σχέσεις βασικών στοιχείων κύκλου

- Να υπολογίσετε την ακτίνα ενός κύκλου, αν το μήκος της περιφέρειας του είναι ίσο με $120\ cm$.
- Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει ο πιο κάτω κύκλος διαμέτρου $4{,}8\ cm$, αν κάνει μια πλήρη στροφή.



Παραδείγματα: Υπολογισμός του π

- Να χρησιμοποιήσετε την περίμετρο κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, για να εξηγήσετε ότι $\pi > 3$. Να προσεγγίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με το εμβαδόν εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου, με τη βοήθεια της τεχνολογίας.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιος μαθηματικός κανόνας επαναλαμβάνεται σε καθεμιά από τις πιο πάνω περιπτώσεις;*
- *Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αν στο τετράγωνο πλευρά 12 εγγράψω 36 κύκλους ακτίνας 1 μονάδας;*

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

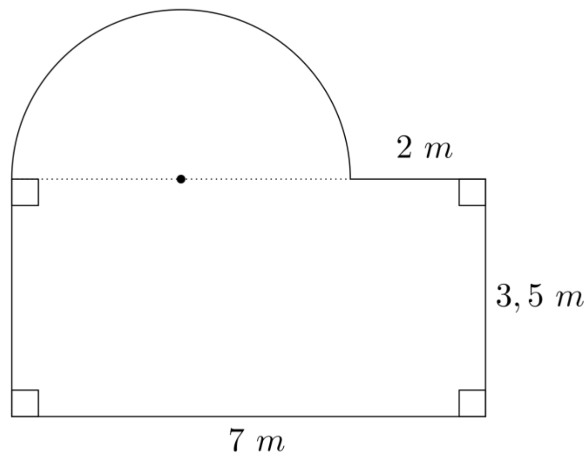
Παράδειγμα: Η πιο κάτω φωτογραφία δείχνει ένα τεράστιο κομμάτι πίτσας .Το κομμάτι είναι σε σχήμα κυκλικού τομέα με κεντρική γωνία $36°$ και ακτίνα $6\ m$. Αν υποθέσουμε ότι κάθε κονσέρβα ντομάτας καλύπτει $0{,}25\ m^2$ πίτσας, πόσα κουτιά κονσέρβας θα χρειαστούν για να καλύψουν ολόκληρο το κομμάτι;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.*
- *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;*
- *Περιγράφω τη σχέση που συνδέει το εμβαδόν του κυκλικού τομέα με τον αριθμό των κονσερβών που χρειάζονται;*

Παράδειγμα: Υπολογισμός εμβαδού και περιμέτρου μεικτόγραμμων σχημάτων

- Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του πιο κάτω σχήματος.



Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Λόγοι - Αναλογίες

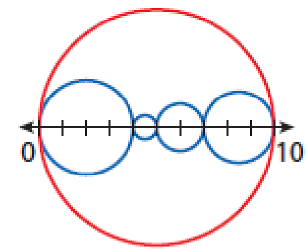
Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

- να επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας διάφορους τρόπους επίλυσης και αναπαραστάσεων
- να υπολογίζουν ζητούμενα σε προβλήματα κίνησης
- να ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής που παρουσιάζονται αριθμητικά, γραφικά ή σε πίνακες

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.

Παράδειγμα: Στην πιο κάτω εικόνα, το κέντρο κάθε κύκλου βρίσκεται πάνω στην αριθμητική γραμμή. Να περιγράψετε τη σχέση μεταξύ των περιφερειών του μεγαλύτερου κόκκινου κύκλου και των τεσσάρων μικρών μπλε κύκλων.



Απαντώ στην ερωτήσεις:

- *Ποιος μαθηματικός κανόνας επαναλαμβάνεται σε καθεμία από τις πιο πάνω περιπτώσεις;*

ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών

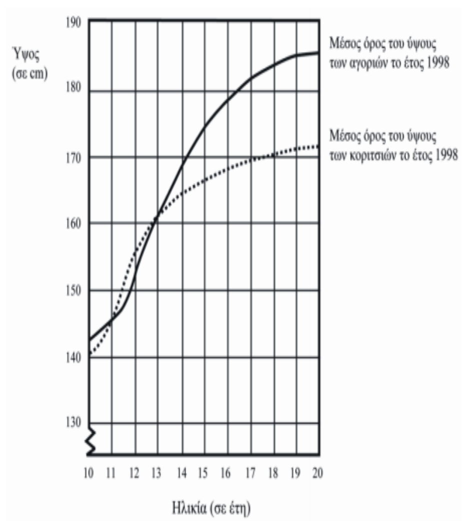
Εφαρμόζω γενικούς μαθηματικούς κανόνες, για να εξηγήσω γεωμετρικούς συλλογισμούς.

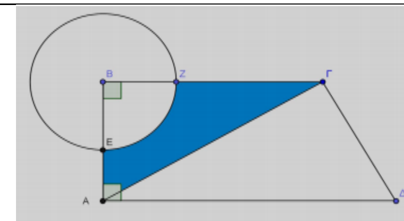
Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Β και ακτίνα $3\ cm$. Αν $AB = 5\ cm$ και $B\Gamma = 12\ cm$, να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της διαγωνίου του τραπεζίου.
β. Το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής.
γ. Την περίμετρο της χρωματισμένης περιοχής.

Παραδείγματα: Προβλήματα μέτρησης

- Να υπολογίσετε την ποσότητα λαδιού που καταναλώνει μια οικογένεια σε διάστημα ενός μηνός ($30\ μέρες$), αν η οικογένεια καταναλώνει $4\ κιλά\ και\ 800\ γραμμάρια$ λάδι την εβδομάδα.
- Στις 8.30 π.μ. παρατηρήθηκε βλάβη σε μια βρύση νερού η οποία επιδιορθώθηκε στις $6{:}\,45$ μ.μ. Η βρύση παρουσίαζε διαρροή νερού ίση με 3 σταγόνες το δευτερόλεπτο. Να υπολογίσετε τα λίτρα νερού που σπαταλήθηκαν, αν 20 σταγόνες αντιστοιχούν σε $1\ cm^3$ νερού.
- Στο πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζεται το μέσο ύψος των αγοριών και των κοριτσιών στην Ολλανδία κατά το έτος 1998.





Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες μαθηματικές ιδέες που έχουμε ήδη μάθει είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;*
- *Με ποιους τρόπους συνδέεται το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;*
- *Ποια άλλα προβλήματα είναι παρόμοια με αυτό;*
- *Ποια μέρη του προβλήματος μπορώ να απλοποιήσω;*

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Κατανοώ τις ποσότητες και τις σχέσεις μεταξύ τους. Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα: Ο κύριος Φώτης θέλει να καλύψει με πλάκες τη βεράντα του σπιτιού του που έχει σχήμα ορθογώνιο. Η βεράντα έχει μήκος $5{,}25\ m$ και πλάτος $3{,}00\ m$. Για τη δουλειά αυτή, ο Φώτης θα χρειαστεί 81 πλάκες για κάθε τετραγωνικό μέτρο. Να υπολογίσετε πόσες πλάκες θα χρειαστεί για να πλακοστρώσει ολόκληρη τη βεράντα.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Τι δείχνουν οι αριθμοί που εμφανίζονται στο πρόβλημα;*
- *Ποια είναι η σχέση μεταξύ του εμβαδού της βεράντας και του εμβαδού της κάθε πλάκας;*

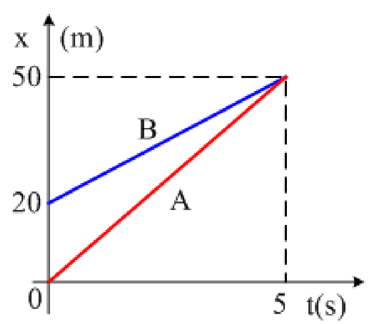
α. Να εξηγήσετε πώς αυτό το διάγραμμα δείχνει ότι κατά μέσον όρο ο ρυθμός ανάπτυξης των κοριτσιών μειώνεται από τα 12 χρόνια και μετά.
β. Να εξηγήσετε σε ποια χρονική περίοδο της ζωής τους τα κορίτσια είναι κατά μέσον όρο ψηλότερα από τα συνομήλικα τους αγόρια (Pisa, 2013).

Παράδειγμα: Πρόβλημα κίνησης

- Να υπολογίσετε πόση ώρα θα χρειαστεί ένα ποδήλατο με μέση ταχύτητα 20 km/h το οποίο θα διανύσει την απόσταση Αθήνας – Θεσσαλονίκης αν ένα αυτοκίνητο που κινείται με μέση ταχύτητα 100 km/h διανύει την ίδια απόσταση σε 5 ώρες.

Παράδειγμα: Χρήση γραφικής παράστασης σε πρόβλημα κίνησης

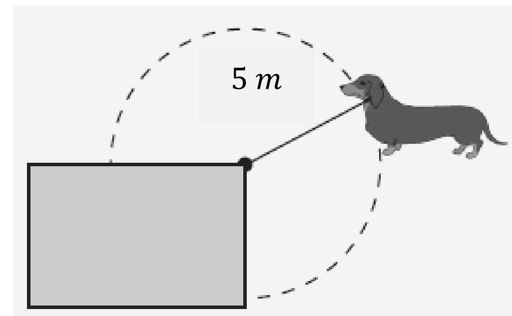
- Δίνεται η πιο κάτω γραφική παράσταση της μετατόπισης (x) ενός κινητού σε συνάρτηση με το χρόνο (t).



ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων

Αναλύω τα προβλήματα και χρησιμοποιώ μαθηματικούς ορισμούς και αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές ιδέες.

Παράδειγμα: Ο Νικόλας έδεσε τον σκύλο του στη γωνιά του σπιτιού του με μια αλυσίδα μήκους $5m$.



α. Ποια είναι η μεγαλύτερη απόσταση που μπορεί να διανύσει ο σκύλος;
β. Πόσο είναι το εμβαδόν της περιοχής που μπορεί να καλύψει ο σκύλος όταν είναι δεμένος με την αλυσίδα του;
γ. Αν ο Νικόλας περιφράξει για τον σκύλο του μια περιοχή σε σχήμα τετραγώνου πλευράς $7\ m$, σε ποια από τις δύο περιπτώσεις ο σκύλος θα έχει περισσότερο χώρο για να κινείται;

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς θα αποφασίσω τι μου ζητά το πρόβλημα να βρω;*
- *Πώς μπορώ να είμαι σίγουρος για την απάντησή μου;*

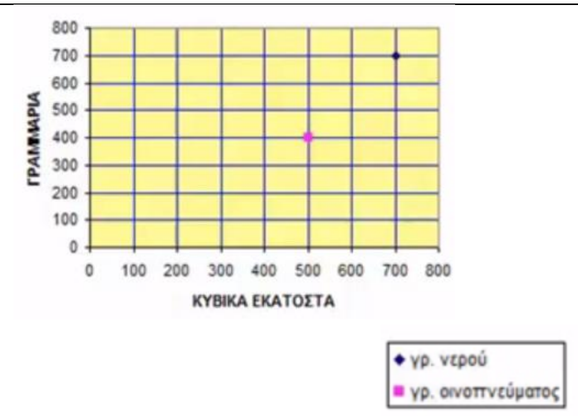
α. Ποιο κινητό κάλυψε μεγαλύτερη απόσταση στο διάστημα των 5 s;
β. Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας A.
γ. Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας B.
δ. Τι παριστάνει η κλίση των δύο ευθειών;
ε. Ποιο από τα δύο κινητά κινείται πιο γρήγορα;

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

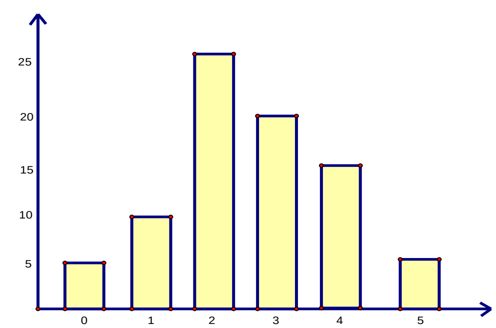
Σχηματίζω μαθηματικές εκφράσεις από πραγματικά προβλήματα και τα μεταφράζω σε συμβολική αναπαράσταση επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.

Παράδειγμα: Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τη σχέση όγκου και μάζας για δύο διαφορετικά υγρά, το νερό και το οινόπνευμα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση που εκφράζει τη σχέση όγκου και μάζας για τα δύο υγρά.

Όγκος σε cm^3	100	200	300	400	500	600	700
Μάζα νερού σε gr	100						
Μάζα οιν. σε gr	80						

		 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιο αριθμητικό μοντέλο μπορώ να κατασκευάσω για να λύσω το πρόβλημα;* • *Πώς θα βοηθούσε αν από τον πίνακα κατασκεύαζα γραφική παράσταση;*

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

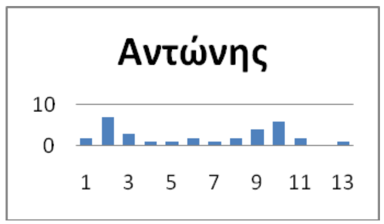
Δείκτες Επιτυχίας	Δείκτες Επάρκειας	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	Μαθηματικές Πρακτικές
• **ΣΠ4.1 Συγκρίνουν σύνολα δεδομένων χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης (π.χ. διάμεσος, μέσος όρος, επικρατούσα τιμή) και διασποράς (π.χ. μέγιστο, ελάχιστο εύρος) και αξιολογούν την καταλληλότητα και τους περιορισμούς της χρήσης των πιο πάνω μέτρων.** • **ΣΠ5.4 Περιγράφουν στατιστικά δεδομένα (για διακριτές μη ομαδοποιημένες μεταβλητές), υπολογίζοντας μέτρα θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή,**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Μεταβλητή,Παρατηρήσεις **Νέες έννοιες:** ✓ **Μέση Τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων. $$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{Άθροισμα Παρατηρήσεων}}{\text{Πλήθος Παρατηρήσεων}}$$ ✓ **Διάμεσος** ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά είναι: ➢ Η μεσαία τιμή- παρατήρηση για περιττό αριθμό παρατηρήσεων, ➢ Η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων για άρτιο αριθμό παρατηρήσεων. ✓ **Επικρατούσα Τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα. ✓ **Μέτρα Θέσης** του συνόλου των παρατηρήσεων ονομάζονται η Μέση Τιμή, η Διάμεσος και η Επικρατούσα Τιμή των παρατηρήσεων.	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (μία γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο) για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.* **Παράδειγμα:** Ένα κείμενο υπαγορεύτηκε στους μαθητές μιας τάξης. Από την εξέταση των γραπτών ως προς τα ορθογραφικά λάθη προέκυψε το ραβδόγραμμα του παρακάτω σχήματος. (α) Να υπολογίσετε πόσοι ήταν οι μαθητές της τάξης. (β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή των λαθών. (γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Με ποιο τρόπο εκτιμώ το πλήθος των μαθητών που*

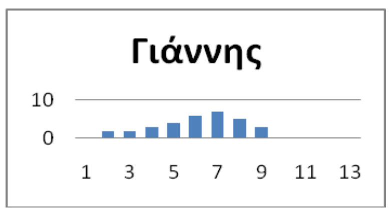
εύρος, τυπική απόκλιση) και συζητούν για την καταλληλότητα χρήσης του κάθε μέτρου (με ή και χωρίς τη χρήση λογισμικού). • **ΣΠ5.5 Συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς δεδομένων.**	Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες έτσι ώστε οι μαθητές: • να περιγράφουν στατιστικά δεδομένα, υπολογίζοντας μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή) • να εξετάζουν πώς μεταβάλλονται τα μέτρα θέσης με την προσθήκη ή αφαίρεση τιμών • να συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης τους • να αξιολογούν κατά πόσο τα συγκεκριμένα μέτρα θέσης είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση σε συγκεκριμένη περίπτωση **Παραδείγματα: Υπολογισμός μέτρων θέσης** • Στο σχολείο της Μαρίας ο καθηγητής Μαθηματικών κάνει διαγωνίσματα με άριστα το 100. Η Μαρία στα τέσσερα πρώτα διαγωνίσματα είχε μέσο όρο 60 μονάδες και στο πέμπτο διαγώνισμα πήρε 80 μονάδες. Να υπολογίσετε ποιος είναι ο μέσος όρος των βαθμών της στα Μαθηματικά ύστερα από τα πέντε διαγωνίσματα. • Επτά καλαθοσφαιριστές έχουν ύψος σε cm: 210, 185, 191, 205, 201, 198, 215. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των υψών τους. **Παράδειγμα: Επίλυση προβλήματος στη μέση τιμή** • Ο μέσος όρος της βαθμολογίας μιας τάξης στο μάθημα των μαθηματικών είναι 17,4.Στην τάξη αυτή ήρθε ένας	*φοιτούν στο συγκεκριμένο σχολείο ;* • *Ποιες πληροφορίες έχω, ώστε να υπολογίσω τη μέση τιμή και τη διάμεσο των λαθών τους;* **ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Χρησιμοποιώ γενικούς μαθηματικούς κανόνες σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.* **Παράδειγμα:** Η μέση τιμή 10 διαδοχικών θετικών ακέραιων αριθμών είναι 10,5. Να βρείτε τους δέκα αριθμούς και τη διάμεσο. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια μέρη του προβλήματος μπορώ να απλοποιήσω;* • *Ποιες μαθηματικές ιδέες που έχω ήδη μάθει είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος* • *Με ποιους τρόπους συνδέω το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;* **ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων.* **Παράδειγμα:** Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις ως ορθές ή λανθασμένες: α. Η επικρατούσα τιμή ορίζεται και σε ποσοτικές και σε ποιοτικές μεταβλητές. β. Η επικρατούσα τιμή είναι μοναδική. γ. Η διάμεσος ενός δείγματος δεν επηρεάζεται από α-

άλλος μαθητής με βαθμό στα Μαθηματικά 14 και ο μέσος όρος της τάξης έπεσε στο 17,3. Πόσοι ήταν οι αρχικοί μαθητές της τάξης;

Παράδειγμα: Σύγκριση πληθυσμών

- Ο Αντώνης και ο Γιάννης είναι πωλητές μεταχειρισμένων αυτοκινήτων. Τα επόμενα ραβδογράμματα δείχνουν τον αριθμό των εβδομαδιαίων πωλήσεων που έκαναν για ένα χρονικό διάστημα.





(α) Να υπολογίσετε:

i) τη μέση τιμή

ii) την επικρατούσα τιμή

(β) Ποιος πώλησε περισσότερα αυτοκίνητα;

(γ) Ποιος είναι ο καλύτερος πωλητής και γιατί;

κραίες παρατηρήσεις.

δ. Η διάμεσος ενός δείγματος ν τιμών είναι μοναδική.

ε. Στο σύνολο των παρατηρήσεων $2, 6, 5, 16, 4, 7, 0, 11$ δεν υπάρχει επικρατούσα τιμή.

στ. Η μέση τιμή μιας μεταβλητής X δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς ελέγχω την ορθότητα των πιο πάνω ισχυρισμών;*
- *Πώς αιτιολογώ την απάντησή μου;*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Παράδειγμα αξιολόγησης μέτρων θέσης
• Ο Κώστας καταγράφει τον αριθμό των πλαστικών σακουλιών που παίρνει από την υπεραγορά κατά το εβδομαδιαίο του ψώνισμα. Τα στοιχεία από το ψώνισμα 10 συνεχών εβδομάδων είναι τα επόμενα.
$9, 8, 5, 9, 12, 8, 7, 6, 5, 9$
(α) Να υπολογίσετε:
Τη Μέση Τιμή
Τη Διάμεσο
Την Επικρατούσα Τιμή
(β) Να εξηγήσετε γιατί η Μέση Τιμή δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τα δεδομένα στην έρευνα του Κώστα.
(γ) Ποια από τις τρείς τιμές θα ήταν περισσότερο χρήσιμη για μια ομάδα περιβαλλοντιστών που θεωρεί ότι οι υπεραγορές δίνουν πάρα πολλές πλαστικές σακούλες.
(δ) Ποια τιμή θα χρησιμοποιούσε ένας καταναλωτής που πιστεύει ότι οι υπεραγορές δεν του δίνουν αρκετές σακούλες για τα ψώνια του;</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>• ΣΠ5.6 Κατανοούν μέσα από πραγματικές καταστάσεις και χρησιμοποιούν τις έννοιες πείραμα</td>
<td>Προαπαιτούμενες Γνώσεις:
✓ Πείραμα Τύχης, Πιθανότητα, Δειγματικός Χώρος
Νέες έννοιες:
✓ Αρχή της Απαρίθμησης ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία όταν ένα πείραμα τύχης εκτελείται σε δύο ή</td>
<td>ΜΠ.6 Ακρίβεια
Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.</td>
</tr>
</table>

τύχης, ενδεχόμενο, δειγματικός χώρος.

- **ΣΠ4.4 Αναπαριστούν το δειγματικό χώρο πειραμάτων με πολλαπλούς τρόπους συμπεριλαμβανομέ-νων δενδροδιαγραμμά-των.**
- **ΣΠ5.8 Διακρίνουν τα ενδεχόμενα σε τυχαία, απλά, βέβαια, αδύνατα.**
- **ΣΠ5.7 Υπολογίζουν την πιθανότητα απλού ενδεχομένου (κλασσικός ορισμός πιθανότητας, Laplace) δειγματικού χώρου ισοπίθανων στοιχειωδών ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης.**
- **ΣΠ4.5 Κατανοούν μέσα από πραγματικές**

περισσότερες φάσεις και κάθε φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ, λ, μ, ... τρόπους αντίστοιχα, τότε το πείραμα έχει $\kappa.\lambda.\mu$ . .... δυνατά αποτελέσματα.

✓ **Δενδροδιάγραμμα**

Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές:

- να αναπαριστούν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης με δενδροδιάγραμμα και να βρίσκουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.
- να υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένων και εφαρμόζουν τον κλασικό ορισμό πιθανότητας στην επίλυση προβλήματος.

Παράδειγμα αναπαράστασης του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης:

- Σε μια ιατρική έρευνα οι ασθενείς έχουν ταξινομηθεί ανάλογα με την ομάδα αίματος (Α, Β, ΑΒ ή 0) καθώς επίσης και ανάλογα με το επίπεδο της πίεσής τους (χαμηλή, κανονική, υψηλή). Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ομάδων ταξινόμησης των ασθενών με χρήση δενδροδιαγράμματος.

Παραδείγματα υπολογισμού πιθανότητας

- Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν τρείς ερωτήσεις Σωστού (Σ) – Λάθους (Λ). Ένας μαθητής, που δεν ξέρει τις σωστές απαντήσεις σημειώνει, τις απαντήσεις τυχαία.

  (α) Να κάνετε το δενδροδιάγραμμα του παραπάνω

Παράδειγμα: Πότε λέμε ότι πραγματοποιείται ή συμβαίνει ένα ενδεχόμενο A;

Τι ονομάζουμε ευνοϊκές περιπτώσεις ενός ενδεχομένου A;

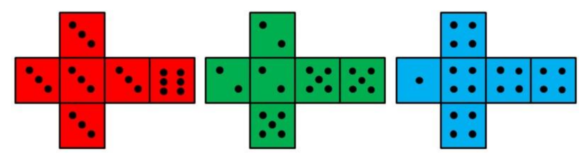
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώ σε αυτή τη δραστηριότητα;*
- *Πώς αιτιολογώ ότι οι απαντήσεις μου είναι λογικές;*

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Χρησιμοποιώ την έννοια του πειράματος τύχης, του δειγματικού χώρου και του δυνατού ενδεχομένου, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα: Έχουμε τρία ζάρια διαφορετικού χρώματος που το καθένα έχει διαφορετικό αριθμό κουκκίδων σε κάθε έδρα του, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα.



Κόκκινο	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**5**
Πράσινο	**2**	**2**	**2**	**5**	**5**	**5**
Μπλε	**1**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**

Ο Κωνσταντίνος και η Ελένη επιλέγουν ένα ζάρι ο καθένας. (Τα ζάρια πρέπει να είναι διαφορετικού χρώματος). Κάθε

<table>
<tr>
<td>

καταστάσεις και χρησιμοποιούν τις έννοιες πείραμα τύχης, ενδεχόμενο, δειγματικός χώρος.

- **ΣΠ6.10 Κατανοούν και εφαρμόζουν την αρχή της απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή) σε πειράματα τύχης.**

</td>
<td>

πειράματος τύχης και να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

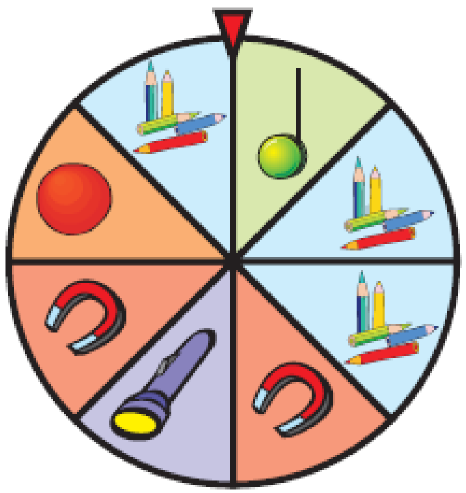
(β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να απαντήσει σωστά σε όλες τις ερωτήσεις.

- Σε ένα πάρτι κάθε παιδί γυρίζει τον πιο κάτω τροχό της τύχης για να δει ποιο δώρο θα κερδίσει. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «να κερδίσει ένα φανάρι»

Β: «να κερδίσει ένα μαγνήτη»

Γ: «να κερδίσει χρωματιστά μολύβια»



Ο Πάτροκλος επιλέγει μια από τις πιο κάτω κάρτες οι οποίες φαίνονται εδώ με τυχαία σειρά.

</td>
<td>

παίκτης ρίχνει το ζάρι διαδοχικά 30 φορές και κάθε φορά σημειώνουν ποιος από τους δύο παίχτες έφερε τον μεγαλύτερο αριθμό. Αυτός που θα κερδίσει τις περισσότερες από τις 30 φορές είναι ο νικητής του παιχνιδιού.

α. Αν ο Κωνσταντίνος επιλέγει το κόκκινο ζάρι και η Ελένη το πράσινο ζάρι, ποιος είναι πιο πιθανό να κερδίσει το παιχνίδι;
β. Ποιος είναι πιο πιθανό να κερδίσει το παιχνίδι, αν ο Κωνσταντίνος επιλέξει το πράσινο και η Ελένη το μπλε;
γ. Ποιος είναι πιο πιθανό να κερδίσει το παιχνίδι αν ο Κωνσταντίνος επιλέξει το μπλε και η Ελένη το κόκκινο;
δ. Αν έπαιζες εσύ το παιχνίδι με έναν φίλο σου, θα ήθελες να επιλέξεις πρώτος ή δεύτερος το χρώμα του ζαριού; Εξήγησε.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Τι αντιπροσωπεύουν οι αριθμοί που βρίσκονται στο πρόβλημα;*
- *Ποια είναι η σχέση μεταξύ του χρώματος του ζαριού και της πιθανότητας επιτυχίας στο παιχνίδι;*
- *Πώς μπορώ να ερμηνεύσω τη σχέση αυτή;*

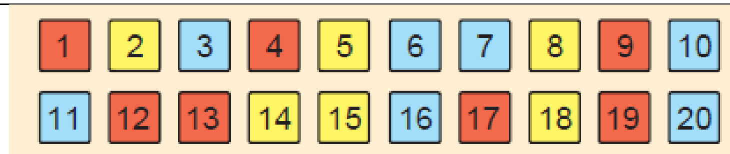
ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Ένας μαθητής, επιλύοντας ασκήσεις Μαθηματικών, αποφάσισε να δοκιμάσει να λύσει τρείς ασκήσεις ή να σταματήσει, όταν λύσει τις δύο σωστά.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.
(β) Αν για κάθε άσκηση που δεν επιλύει ασχολείται 20 λεπτά και για κάθε άσκηση που επιλύει σωστά ασχολείται

</td>
</tr>
</table>



Υπολογίστε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:
A: « Να επιλέξει κάρτα με περιττό αριθμό»
B: « Να επιλέξει κίτρινη κάρτα»
Γ: « Να επιλέξει μπλε κάρτα με άρτιο αριθμό»
Δ: « Να επιλέξει κόκκινη ή μπλε κάρτα»
E: « Να επιλέξει κόκκινη κάρτα με αριθμό πολλαπλάσιο του 4»
Z: « Να επιλέξει μπλε κάρτα με πρώτο αριθμό»

15 λεπτά, να βρεθεί ο ελάχιστος και ο μέγιστος χρόνος της μελέτης του.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποια είναι τα δεδομένα του προβλήματος;*
- *Ποιες προηγούμενες γνώσεις χρειάζομαι;*
- *Από ποια στάδια πρέπει να περάσω για να επιλύσω το πρόβλημα αυτό;*
- *Είναι η απάντησή μου λογική;*

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

Κατασκευάζω κατάλληλο διάγραμμα για να περιγράψω τα δεδομένα ενός προβλήματος και τα ερμηνεύω.

Παράδειγμα:

Η καντίνα ενός σχολείου διαθέτει τρία είδη σνακ: σάντουιτς (Σ), τυρόπιτα (T) και κρουασάν (K) και δύο είδη χυμού: πορτοκάλι (Π) και μήλο (M). Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή που αγόρασε ένα είδος σνακ και ένα είδος χυμού και καταγράφουμε την προτίμησή του. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Να γίνει δενδροδιάγραμμα.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποια είναι η καταλληλότερο διάγραμμα για να αναπαραστήσω τα δεδομένα του πιο πάνω προβλήματος;*
- *Πώς με βοηθά το διάγραμμα να ερμηνεύσω τα δεδομένα του προβλήματος αυτού;*

ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό

Βλέπω επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης και συνδέω τα πειραματικά δεδομένα με τη θεωρία.

Παράδειγμα: Ζήτησε από κάποιον φίλο σου να ετοιμάσει ένα αδιαφανές σακουλάκι που να περιέχει 20 κόκκινες και κίτρινες καραμέλες με άγνωστο αριθμό από το κάθε χρώμα. Πάρε μια καραμέλα από το σακουλάκι χωρίς να κοιτάζεις. Επανατοποθέτησέ τη πίσω στη σακούλα και επανέλαβε το ίδιο πείραμα μέχρι να συμπληρωθούν 50 φορές.

Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Αποτέλεσμα		Συνολικά
Κόκκινο		
Κίτρινο		

α. Να χρησιμοποιήσεις τα αποτελέσματά για να προβλέψεις πόσες κόκκινες και πόσες κίτρινες καραμέλες υπήρχαν μέσα στη σακούλα.

β. Άνοιξε τη σακούλα και έλεγξε την πρόβλεψή σου. Πόσες φορές επέλεξες κόκκινη καραμέλα;

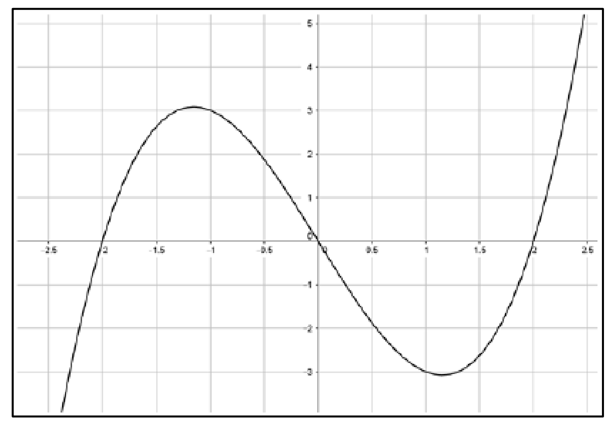
γ. Βάση των πραγματικών αριθμών κόκκινων καραμελών υπολόγισε την πιθανότητα να επιλέξεις κόκκινη καραμέλα.

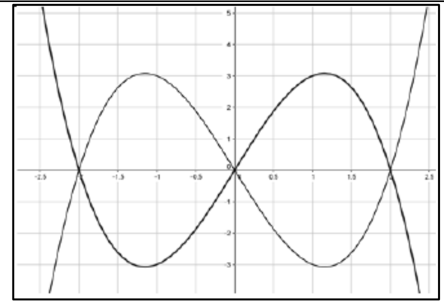
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς ελέγχω αν ο πιο πάνω ισχυρισμός είναι ορθός ή όχι;*
- *Μπορώ να οδηγηθώ σε κάποια γενίκευση μέσα από τα πειραματικά δεδομένα του προβλήματος;*

• **ΣΠ5.1 Διακρίνουν τα διάφορα είδη μεταβλητών (Ποιοτικές, Ποσοτικές, Διακριτές, Συνεχείς).**		Η διδασκαλία του δείκτη ΣΠ5.1 είναι απαραίτητη και αποτελεί προϋπόθεση για τη διδασκαλία άλλων εννοιών.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ		
Δείκτες Επιτυχίας	**Δείκτες Επάρκειας**	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	**Μαθηματικές Πρακτικές**
• **Α5.13 Εκτελούν πράξεις μονωνύμων και πολυωνύμων και αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά βασικές αλγεβρικές ταυτότητες.** • **Α4.10 Κατανοούν και εφαρμόζουν αλγεβρικές τεχνικές, για να κάνουν αναγωγή ομοίων όρων, απλοποιούν ή αναλύουν αλγεβρικές εκφράσεις και διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ των εννοιών «εξίσωση», «τύπος», «ταυτότητα» και**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ Ορισμός και βασικά στοιχεία στο μονώνυμο και πολυώνυμο. ✓ Πράξεις με μονώνυμα και πολυώνυμα (Πρόσθεση, Αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση). **Νέες Έννοιες:** ✓ **Αλγεβρική Ταυτότητα** είναι κάθε ισότητα, που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών. Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές και αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να κατανοήσουν την έννοια της ταυτότητας, ως ειδική περίπτωση ισότητας, που αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει η ισότητα. Το σύμβολο της ισότητας διαφέρει από το σύμβολο της ταυτότητας όταν μιλάμε σε πιο αυστηρή Μαθηματική γλώσσα. • να αποδεικνύουν τις αξιοσημείωτες ταυτότητες: $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$ $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ • να ερμηνεύουν γεωμετρικά ποσότητες της μορφής α^2, $\alpha\beta$ και $(\alpha \pm \beta)^2$ και να δίνουν έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία που έχει μία ταυτότητα,	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα.* **Παράδειγμα:** • Να ορίσετε την έννοια της ταυτότητας. • Να δώσετε ένα παράδειγμα ταυτότητας με μία μεταβλητή και ένα με δύο μεταβλητές. • Να δώσετε ένα παράδειγμα ισότητας που να μην είναι ταυτότητα. • Ποια από τα πιο κάτω διαγράμματα αναπαριστούν συνάρτηση; 

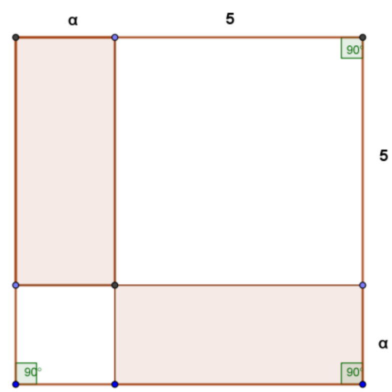
«παράσταση». • **Α4.11 Συνδυάζουν αλγεβρικές εκφράσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές, για την εξαγωγή συμπερασμάτων.** • **Α5.14 Παραγοντοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και επιλύουν εξισώσεις με παραγοντοποίηση.** • **Α6.15 Επιλύουν και διερευνούν εξισώσεις και ανισώσεις ανωτέρου του β΄ βαθμού.** • **Α4.12 Επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις πρώτου βαθμού αλγεβρικά και γραφικά, χρησιμοποιώντας**	αιτιολογώντας την απάντησή τους. • να χρησιμοποιούν αλγεβρικές μεθόδους υπολογισμού πιο σύνθετων αναπτυγμάτων όπως $(\alpha+\beta+\gamma)^2$, $(\alpha+\beta)^3$ και $(\alpha-\beta)^3$, δίνοντας έμφαση στη μεθοδολογία απόδειξης τους, κάνοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς σε ήδη γνωστές ταυτότητες. **Παράδειγμα: Κατανόηση ταυτότητας** • Να αναγνωρίσετε και να αιτιολογήσετε ποια από τις πιο κάτω ισότητες αποτελεί ταυτότητα. $2(x+3)=x+10$ και $2(x+3)=2x+6$ • Να εξηγήσετε γιατί η ισότητα $(\alpha+2)^2=\alpha^2+4\alpha+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι ταυτότητα. **Παραδείγματα: Απόδειξη και εφαρμογές αλγεβρικής ταυτότητας** • Να αποδείξετε τις ταυτότητες: $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ • Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα: $(\alpha+1)^2, \left(2\beta-\frac{\gamma}{2}\right)^2$ και $(3\delta+4)(3\delta-4)$ • Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω ισότητα είναι ταυτότητα: $(x+3)^2+(x-3)(x+3)+(x-3)^2=3(x^2+3)$.	 *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς συνδέω τον ορισμό της συνάρτησης και πώς αιτιολογώ από τη γραφική παράσταση κατά πόσο ο τύπος $y=f(x)$ αποτελεί συνάρτηση;* **ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Οργανώνω τους αριθμούς και τις μεταβλητές ώστε να συνθέτω και να χειρίζομαι με ευελιξία τα Μαθηματικά, εφαρμόζοντας γενικούς κανόνες.* **Παράδειγμα**: • Να αποδείξετε την ταυτότητα (Lagrange): $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha x-\beta y)^2=(x^2+y^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$ • Να χρησιμοποιήσετε την πιο πάνω ταυτότητα, για να αποδείξετε την πιο κάτω ανισότητα. $(\alpha x+\beta y)^2\le(x^2+y^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$ *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς μπορώ να συνδέσω την ταυτότητα ισότητας με την ανισοτική ταυτότητα, χρησιμοποιώντας την ανισοτική σχέση $a^2\ge0, \forall\, a\in\mathbb{R}$;*

ποικιλία μεθόδων, με ή χωρίς τεχνολογία και χρησιμοποιούν τις εξισώσεις και ανισώσεις στην επίλυση προβλημάτων.

- **Α4.8Κατανοούν την έννοια της κλίση ευθείας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών και την εφαρμόζουν σε προβλήματα.**
- **Α5.6 Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας και την αναπαριστούν γραφικά, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.**
- **Α5.7 Διερευνούν τη θέση δύο ευθειών στο επίπεδο και ανακαλύπτουν**

Παράδειγμα: Γεωμετρική ερμηνείας ταυτότητας

- Να εξηγήσετε γιατί το πιο κάτω σχήμα μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση του αναπτύγματος $(\alpha+5)^2$.



- Για ποια τιμή του α ισχύει η ισότητα $(\alpha+5)^2=\alpha^2+5^2$; Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά;

Παραδείγματα: Απόδειξη και εφαρμογή σύνθετων αναπτυγμάτων

- Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3$, για να βρείτε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha-\beta)^3$.
- Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2$, για να βρείτε το ανάπτυγμα των ταυτοτήτων $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ και $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$.
- Να γενικεύσετε για αναπτύγματα ταυτοτήτων της μορφής $(\alpha+\beta)^\nu,\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu>3$.

Παράδειγμα: Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι 6 και το γινόμενο τους 7, να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων και των κύβων των δύο αριθμών.

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Πώς αναγνωρίζω μέσα από τις αξιοσημείωτες ταυτότητες τις σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ και $\alpha^2+\beta^2$ ή $\alpha^3+\beta^3$;*

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα:

(α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=2014\cdot2016+1$ είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού, χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστική μηχανή.

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Πώς επιλύω το πρόβλημα εισάγοντας μεταβλητές; Αν θέσω $\alpha=2014$, τότε ο αριθμός A ποια μορφή μπορεί να πάρει συναρτήσει του α και πώς αναγνωρίζω ότι είναι τέλειο τετράγωνο;*

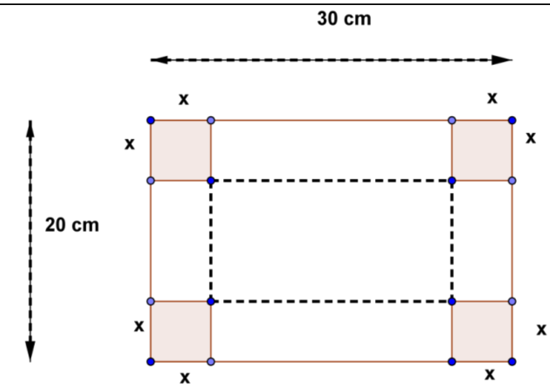
(β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο τεσσάρων τυχαίων διαδοχικών φυσικών αριθμών αυξημένων κατά 1, είναι πάντοτε τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Απαντώ στην ερώτηση:

- *Πώς με βοηθά η εισαγωγή μεταβλητών, ώστε να απλοποιήσω το πρόβλημα;*

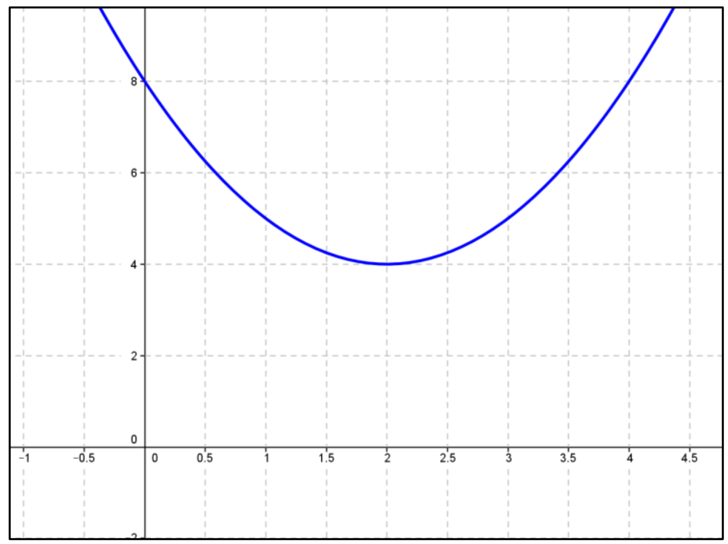
κριτήρια καθετότητας και παραλληλίας • **Α5.8 Επιλύουν γραφικά ή με άλλο κατάλληλο τρόπο προβλήματα με γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις.** • **Α5.4 Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις γραμμικών συναρτήσεων και διερευνούν τη σημασία των παραμέτρων α και β της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)=ax+\beta}$ (χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας).** • **Α5.15 Επιλύουν και διερευνούν γραμμικά**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ Διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο ✓ Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης και Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, δύο ή και περισσότερων φυσικών αριθμών ✓ Ευκλείδεια Διαίρεσης στο $\mathbb{N}_0$ **Νέες Έννοιες:** ✓ **Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης**: Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x) \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, για τα οποία ισχύει $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ και ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(x)$. ✓ **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** δύο ή περισσοτέρων πολυωνύμων είναι ο κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων αυτών με το μεγαλύτερο δυνατό βαθμό. ✓ **Παραγοντοποίηση ή ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση σε γινόμενο. ✓ **Ρητή αλγεβρική παράσταση** είναι η παράσταση που είναι σε μορφή κλάσματος με όρους που είναι πολυώνυμα. ✓ **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π)** δύο ή περισσοτέρων πολυωνύμων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ονομάζεται το γινόμενο όλων των παραγόντων τους με εκθέτη κάθε παράγοντα	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το επιλύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παραδείγματα:** (α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διψήφιων ακέραιων αριθμών, που έχουν αντιστραμμένα τα ψηφία τους, είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 99. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιος είναι ο διψήφιος αριθμός που έχει γενικά x δεκάδες και y μονάδες;* • *Ποιος είναι ο διψήφιος αριθμός που προκύπτει, αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του;* • *Πώς συνδέονται τα δεδομένα με βασικές ταυτότητες που ήδη γνωρίζουμε;* • *Πότε ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 99;* (β) Δίνεται ότι $x+\frac{1}{x}=4$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $x^2+\frac{1}{x^2}$ και $x^3+\frac{1}{x^3}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Είναι ορθή η πρόταση* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}$; • *Ποια σχέση έχουν οι παραστάσεις* $x+\frac{1}{x}$ *και* $x^2+\frac{1}{x^2}$;

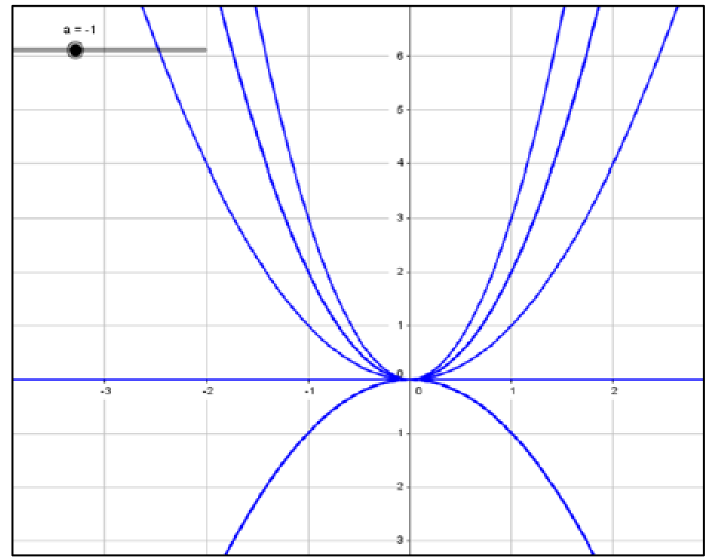
συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων δύο μεταβλητών (αλγεβρικά ή με τη χρήση δυναμικών λογισμικών) και τα εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων καθημερινής ζωής. • **Α4.4 Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο πεδίο τιμών και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.** • **Α5.9 Αναπαριστούν γραφικά τη συνάρτηση $\boldsymbol{y = ax^2 + \beta x + \gamma}$**	το μεγαλύτερο εκθέτη. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να ορίζουν την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης στα πολυώνυμα • να αναγνωρίζουν τις βασικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης και περιπτώσεις που περιέχουν συνδυασμό διαφορετικών περιπτώσεων • να επιλύσουν εξισώσεις ανώτερου βαθμού με παραγοντοποίηση • να υπολογίζουν το Ε.Κ.Π. αλγεβρικών παραστάσεων, ώστε να είναι σε θέση να αναφέρουν τις κατάλληλες τιμές για να ορίζεται ένα κλάσμα • να απλοποιούν και να εκτελούν τις βασικές πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις • να επιλύουν ρητές αλγεβρικές εξισώσεις **Παραδείγματα: Μ.Κ.Δ. και διαίρεση πολυωνύμων** • Να υπολογίσετε τον άλλο παράγοντα του πολυωνύμου $2x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, όταν είναι γνωστός ο παράγοντας $x - 2$. • Να υπολογίσετε το πολυώνυμο, που διαιρούμενο με το $2x - 1$ δίνει πηλίκο $x^2 - 3x + 2$ και αφήνει υπόλοιπο 5. • Αν $f(x) = x^2 + 5x + 7$ και $g(x) = x - 2$, να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x) \div g(x)$ είναι ίσο με	(γ) Να επιλύσετε τις εξισώσεις: • $x^2 - 10x + 9 = 0$ • $(2x+1)^2 - 10(2x+1) + 9 = 0$ • $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ • $y^6 - 9y^3 + 8 = 0$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς συνδέονται οι εξισώσεις της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με τις εξισώσεις $ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ και $ax^6 + \beta x^3 + \gamma = 0$;* • *Ποιος κατάλληλος μετασχηματισμός θα βοηθήσει στην επίλυση των πιο πάνω εξισώσεων;* **ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα (συμβολικές εκφράσεις, διαγράμματα, κτλ.), για να αναπαραστήσω καταστάσεις της καθημερινής ζωής.* **Παράδειγμα**: Μια εταιρεία κατασκευής χάρτινων δοχείων θέλει να κατασκευάσει κουτιά σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου από χάρτινη κόλλα με διαστάσεις $30\ cm \times 20\ cm$, αποκόπτοντας τετράγωνα από κάθε γωνία του, μήκους $x\ cm$. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του στερεού που δημιουργείται έχει τύπο $V(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x$, όπου τα α, β, γ είναι σταθεροί αριθμοί που πρέπει να προσδιοριστούν.

και αναγνωρίζουν πώς προκύπτει από την παραβολή $y = ax^2$ με μετατόπιση.	$f(2)$. • Να βρίσκουν τον Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων: $9\alpha(\alpha-\beta), -3\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2, 6\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ **Παραδείγματα: Παραγοντοποίηση βασικών περιπτώσεων** • Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις: ✓ *Κοινός Παράγοντας:* $2xy + 4xz\,,\ \alpha(\beta+2\gamma) - \kappa^2(\beta+2\gamma)$ ✓ *Κοινός Παράγοντας κατά Ομάδες* $ax + \beta x - ay - \beta y\,, x^2 - xy - 9x + 9y$ ✓ *Διαφορά Δύο Τετραγώνων* $4\alpha^2 - 25\beta^2\,,\ 1 - \frac{9x^2}{16}$ ✓ *Άθροισμα-Διαφορά Δύο Κύβων* $\gamma^3 - 64\,,\ 8x^3 + 125a^3$ ✓ *Τριώνυμο Δεύτερου Βαθμού* $x^2 + 10x + 16\,,\ y^2 - 6y + 8$ $a^2 + 2a - 15\,,\ \beta^2 - \beta - 72$ ✓ *Ανάπτυγμα Τέλειου Τετραγώνου* $x^2 + 8x + 16\,,\ 4a^2 - 12a + 9$ ✓ *Συνδυαστικές Ασκήσεις* $\alpha - 36\alpha^3\,,\ x^2 + 5x + 6 + \kappa x + 3\kappa$	 *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποιες είναι οι τρεις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;* **Παράδειγμα:** Στο πιο κάτω σχήμα, παρουσιάζεται ένα γεφύρι στο Σύδνεϋ της Αυστραλίας. Το στήριγμα του γεφυριού είναι σε σχήμα παραβολής και το ένα άκρο του, που αγγίζει το ποτάμι, βρίσκεται 20 m από το κέντρο του γεφυριού και 8 m κάτω από το ύψος του γεφυριού. Αν η εξίσωση που μοντελοποιεί το παραβολικό τόξο είναι της μορφής $y = ax^2$, να υπολογίσετε την τιμή του a. 

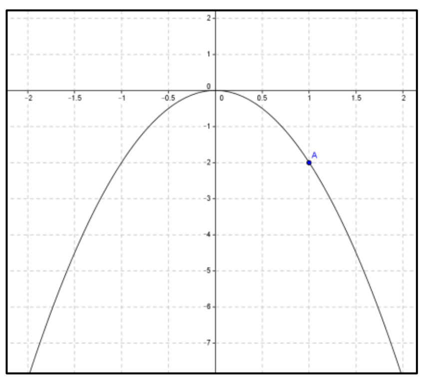
	Παραδείγματα: Επίλυση εξισώσεων δεύτερου και ανώτερου βαθμού • Να επιλύσετε τις εξισώσεις: $(x-3)(2x+1)=0$ $y^3+y^2-6=0$ $3x^2-2x-8=0$ **Παραδείγματα: Ορισμός και απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων** • Να αναφέρετε τις πραγματικές τιμές του x, για να ορίζεται η παράσταση: $\frac{x+2}{x(x-1)(3x-5)}$ • Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{3x+9}{x^2-9}$, αφού αναφέρετε για ποιες τιμές ορίζεται. **Παραδείγματα:Πράξεις με ρητές παραστάσεις** • Να εκτελέσετε τις πράξεις στις πιο κάτω ρητές παραστάσεις: $\frac{\alpha^2-4\alpha}{\alpha^2-16} \div \frac{8\alpha}{\alpha^2+4\alpha}$, $\frac{2\beta}{\beta^2-1}-\frac{1}{\beta+1}$, $\frac{\left(4-\frac{1}{\alpha^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{\alpha}\right)}$ **Παράδειγμα: Επίλυση ρητών εξισώσεων** • Να επιλύσετε την εξίσωση: $\frac{2}{x^2-7x+20}+\frac{2}{4-x}=\frac{1-x}{2x-6}$	**Παράδειγμα:** Η απόσταση s ενός σώματος που κάνει «ελεύθερη πτώση», όταν αφήνεται από την ηρεμία, σε σχέση με το χρόνο t δίνεται από τον τύπο $s=\frac{1}{2}gt^2$, όπου $g \cong 10ms^{-2}$ η σταθερή επιτάχυνση λόγω βαρύτητας. Να υπολογίσετε: • το ύψος από το οποίο έπεσε η μπάλα, αν η πτώση της διήρκησε 4 δευτερόλεπτα • πόσο χρόνο χρειάζεται ένα σώμα να πέσει από ύψος $180\ m$ **ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη μου τη γνώμη των άλλων* **Παράδειγμα**: • Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $x^2-6x+13=0$ **δεν έχει** πραγματικές λύσεις. • Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $x^2-6x+9=0$ **έχει δύο** πραγματικές λύσεις, που είναι ίσες μεταξύ τους. • Να δώσετε ένα δικό σας παράδειγμα μίας εξίσωσης δεύτερου βαθμού που να: ○ έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες ○ έχει δύο πραγματικές ρίζες που να είναι άνισες μεταξύ τους ○ μην έχουν πραγματικές ρίζες

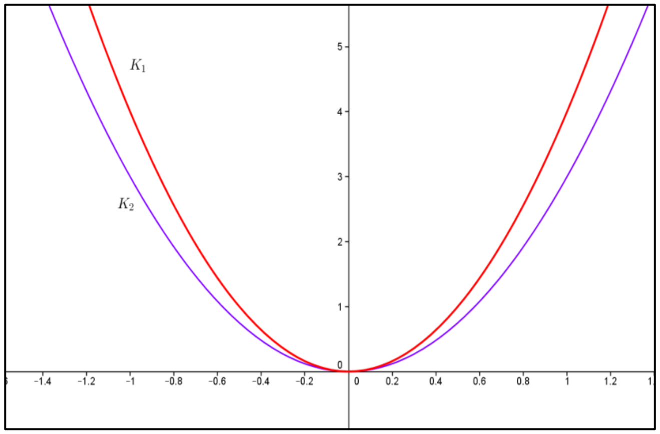
		• Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η ευθεία $x = 0$ (άξονας των τεταγμένων) είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = ax^2$; Ποιο σημείο της παραβολής $y = 2x^2$ είναι συμμετρικό του $A(-3, 18)$; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Μπορώ να παραγοντοποιήσω την παράσταση* $x^2 - 6x + 13$, *για να λύσω την εξίσωση* $x^2 - 6x + 13 = 0$; • *Ποια άλλη μέθοδο μπορώ να χρησιμοποιήσω, για να λύσω μία εξίσωση δεύτερου βαθμού;* • *Πότε μια άρρητη αλγεβρική παράσταση (που περιέχει παράσταση μέσα σε ριζικό) δεν έχει νόημα πραγματικού αριθμού;* • *Ποιο είναι το κριτήριο μου για την κατασκευή μίας εξίσωσης δεύτερου βαθμού ανάλογα με το είδος των ριζών της;* • *Πότε μια ευθεία αποτελεί άξονα συμμετρίας ενός σχήματος;*

• **Α4.4 Κατανοούν την έννοια της συνάρτησης και επεξηγούν τη διαδικασία απεικόνισης ενός στοιχείου του πεδίου ορισμού στο πεδίο τιμών και διακρίνουν την έννοια της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.** • **Α4.5 Δημιουργούν και συμπληρώνουν πίνακα τιμών, χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο μιας συνάρτησης.** • **Α3.6 Περιγράφουν, αναπαριστούν, επεξηγούν και βρίσκουν το γενικό τύπο συναρτήσεων.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις** ✓ Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ και η γραφική της παράσταση ως ευθεία ✓ Κλίση ευθείας ✓ Αλγεβρική και γραφική επίλυση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων ✓ Πεδίο Ορισμού και Πεδίο Τιμών συνάρτησης ✓ Διαφορετικές μορφές αναπαράστασης μίας συνάρτησης (βελοειδές διάγραμμα, γράφημα, τύπο, πίνακα τιμών, γραφική παράσταση) **Νέες Έννοιες:** ✓ **Τύπος απόστασης** δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. $$(\boldsymbol{AB}) = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$ ✓ **Μέσο ευθυγράμμου** τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Είναι το σημείο M με συντεταγμένες $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}, y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$. ✓ Οι δύο ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1,\ \varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$: **τέμνονται, όταν $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$** **είναι παράλληλες, όταν $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2, \beta_1 \neq \beta_2}$** **συμπίπτουν, όταν $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2, \beta_1 = \beta_2}$** **είναι κάθετες μεταξύ τους, όταν $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1}$**	**ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων** *Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο), για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.* **Παραδείγματα:** • Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, να εξετάσετε κατά πόσο έχουν λύση οι πιο κάτω εξισώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας. ○ $f(x) = 0$ ○ $f(x) = 4$ ○ $f(x) = 8$ ○ $f(x) = -4$ 

• **Α4.6 Κατασκευάζουν διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις, για να αναπαραστήσουν τύπους συναρτήσεων, με ή χωρίς τεχνολογία, σχεδιάζοντας σημεία σε σύστημα αξόνων.** • **Α4.7 Κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ευθείας, υπολογίζοντας τις συντεταγμένες δύο σημείων της και ελέγχουν αλγεβρικά και γραφικά κατά πόσο ένα σημείο ανήκει στην ευθεία.**	✓ Ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους της μορφής: $\begin{cases} y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{cases}$ **έχει μοναδική λύση, όταν $\lambda_1 \neq \lambda_2$** **δεν έχει λύση, όταν $\lambda_1 = \lambda_2, \beta_1 \neq \beta_2$** **έχει άπειρες λύσεις, όταν $\lambda_1 = \lambda_2, \beta_1 = \beta_2$** ✓ Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση είναι μία καμπύλη, που ονομάζεται **παραβολή.** ○ Για $a > 0$, η γραφική παράσταση παρουσιάζει **ελάχιστο** σημείο στην κορυφή της $(0,0)$, έχει Π.Τ. το $[0, \infty)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$. ○ Για $a < 0$, η γραφική παράσταση παρουσιάζει **μέγιστο** σημείο στην κορυφή της $(0,0)$, έχει Π.Τ. το $(-\infty, 0]$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 0$. ○ Όταν η τιμή του $\|a\|$ αυξάνει, το σχήμα της καμπύλης «κλείνει», πλησιάζοντας τον άξονα συμμετρίας της. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές: • να εφαρμόζουν τον τύπο εύρεσης της απόστασης μεταξύ δύο σημείων A και B και του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων • να βρίσκουν τη σχετική θέση δύο ευθειών και να συνδέουν τις έννοιες «τέμνονται», «παράλληλες», «συμπίπτουν» με τις αντίστοιχες περιπτώσεις για τη	• Το εφαρμογίδιο *«Paravoli1.ggb»* εμφανίζει τη παραβολή $y = ax^2$. Ο δρομέας a μπορεί να μεταβάλλεται. Να μελετήσετε σε κάθε περίπτωση ($a > 0$, ή $a < 0$) τη μορφή και το «άνοιγμά» της και να αναφέρετε σε ποιες περιπτώσεις η καμπύλη παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο. Τι συμβαίνει όταν το $a = 0$;  **ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Βλέπω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και ψάχνω για γενικεύσεις και σύντομες λύσεις.* **Παραδείγματα:** • Δεδομένου ότι γνωρίζουμε **το Π.Ο., το Π.Τ., την κορυφή, τον άξονα συμμετρίας και το αν παρουσιάζει ελάχιστη ή**

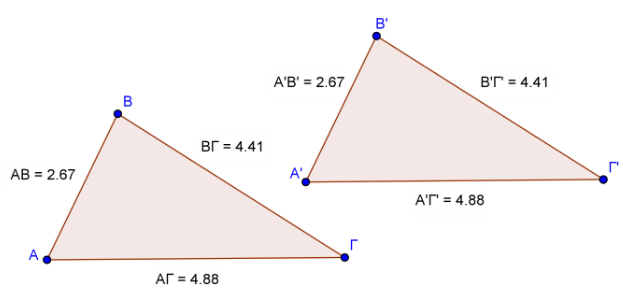
• **Α4.9 Μοντελοποιούν και περιγράφουν μεγέθη που μεταβάλλονται σε πραγματικές καταστάσεις και τα αναπαριστούν σε πίνακα τιμών ή σε γραφική παράσταση.** • **Α5.5 Μελετούν, ερμηνεύουν και εφαρμόζουν γραφικές παραστάσεις τμηματικών συναρτήσεων.** • **4.1 Επιλύουν προβλήματα βρίσκοντας τον επόμενο όρο ή τον όρο που λείπει σε μοτίβα, περιγράφουν λεκτικά τον κανόνα του μοτίβου και**	επίλυση συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους • να μεταφράζουν ένα πρόβλημα από λεκτική έκφραση δύο προτάσεων σε αντίστοιχη συμβολική έκφραση δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να επιλύουν το σύστημα αλγεβρικά με κατάλληλη μέθοδο • να αναγνωρίζουν γραφικά το είδος της λύσης ενός συστήματος και να το επιλύουν, όταν αυτό έχει λύση • να μελετούν και να παριστάνουν γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=ax^2, a\neq 0$, και να είναι σε θέση να αναφέρουν τα βασικά στοιχεία της: Κορυφή, άξονας συμμετρίας, Πεδίο τιμών και ελάχιστο-μέγιστο (ανάλογα). **Παραδείγματα: Απόσταση μεταξύ δύο σημείων και συντεταγμένες μέσου ευθυγράμμου τμήματος** • Να υπολογίσετε την απόσταση AB και το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB, όταν $A(-1,2)$ και $B(2,-2)$. **Παραδείγματα: Σχετική θέση δύο ευθειών** • Να αναφέρετε τη σχετική θέση δύο ευθειών όταν δίνεται η εξίσωσή τους και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. $\begin{cases} y=5x-3 \\ y=2x+6\end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=3x+6\end{cases}$, $\begin{cases} y=5x-3 \\ 2y=10x-6\end{cases}$ • Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου α, ώστε οι ευθείες $\begin{cases} y=(\alpha+2)x-3 \\ y=\frac{2}{3}x+4\end{cases}$ να είναι παράλληλες.	**μέγιστη τιμή**, η συνάρτηση με τύπο $f(x)=ax^2, a\neq 0$, να αναφέρετε τι αλλάζει και τι δεν αλλάζει από τα πιο πάνω στοιχεία για τις συναρτήσεις: ○ $f_1(x)=x^2+5$ ○ $f_2(x)=3-x^2$ ○ $f_3(x)=(x-1)^2+2$ ○ $f_4(x)=9-(x-2)^2$ Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις σας για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 και f_4, να αναφέρετε: ○ το Π.Ο. και το Π.Τ. ○ την κορυφή ○ τον άξονα συμμετρίας ○ την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή για τις συναρτήσεις με τύπο $f(x)=(x+\kappa)^2+\lambda$ $f(x)=\lambda-(x+\kappa)^2$

εκφράζουν το νιοστό όρο σε λεκτική ή συμβολική μορφή. • **Α4.2 Επεκτείνουν και κατασκευάζουν μοτίβα χρησιμοποιώντας ακέραιους, δεκαδικούς και κλάσματα.** • **Α5.1 Χρησιμοποιούν μοτίβα, καθώς και αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους προς επίλυση προβλημάτων.**	• Να επιλύσετε τα πιο κάτω συστήματα, χρησιμοποιώντας είτε τη μέθοδο της αντικατάστασης, είτε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, και να ερμηνεύσετε το είδος της λύσης τους γραφικά. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x+2y=8 \end{cases}, \begin{cases} -2x+4y=7 \\ 3x-6y=-10 \end{cases}$ • «Τα ψηφία ενός $2-$ψήφιου αριθμού διαφέρουν κατά 4, και αν αντιστραφούν τα ψηφία του, προκύπτει αριθμός μικρότερος του αρχικού κατά 36». Να βρείτε τον αρχικό αριθμό. **Παραδείγματα: Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=ax^2, a\neq 0}$** • Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης, όταν η γραφική παράσταση της καμπύλης είναι παραβολή και περνά από το σημείο $A\ (1,-2)$. Στη συνέχεια, να αναφέρουν το $\Pi.T.$ της, τον άξονα συμμετρίας της, το αντίστοιχο συμμετρικό σημείο του A ως προς τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της. 	

	✓ Να αναφέρετε ποια καμπύλη από τις K_1, K_2 αντιστοιχούν στις συναρτήσεις με τύπο $f(x) = 3x^2, g(x) = 4x^2$ 	

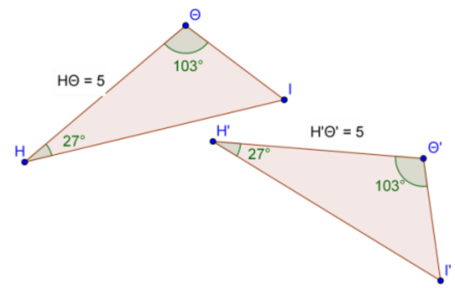
<table>
<tr><th colspan="3">ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>• Γ5.4 Ορίζουν βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (στερεά, γεωμετρικά σχήματα, επίπεδο, ημιεπίπεδο, σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση δύο σημείων , μέσο ευθύγραμμου τμήματος, σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων, πράξεις μετα-</td>
<td>Προαπαιτούμενες γνώσεις:
✓ Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου
✓ Ιδιότητες ισοσκελών τριγώνων
✓ Ορισμοί και ιδιότητες παραλληλογράμμων
Νέες έννοιες:
✓ Ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο
➢ Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη απόλυτη διαφορά τους.
➢ Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου και αντίστροφα.
Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές να κατανοήσουν κατά πόσο ένα τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο ή όχι.
Παράδειγμα: Ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο
• Να αναγνωρίσετε και να δικαιολογήσετε γιατί δεν μπορεί να κατασκευαστεί τρίγωνο που έχει πλευρές με μήκη $10\ cm, 15\ cm,\ 26\ cm$.
• Το τρίγωνο $ΑΒΓ$, έχει $ΑΒ = 8\ cm$ και $ΒΓ = 12\ cm$. Να υπολογίσετε το διάστημα στο οποίο πρέπει να ανήκει η</td>
<td>ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων
Χρησιμοποιώ διαθέσιμα εργαλεία των Μαθηματικών (Γεωμετρικά όργανα, κατάλληλο εφαρμογίδιο, ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) για να κάνω κατασκευές, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες για να εμβαθύνω στην κατανόηση των Γεωμετρικών εννοιών.
Παραδείγματα:
• Να εξηγήσετε κατά πόσο είναι κατασκευάσιμα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ και στη συνέχεια να τα κατασκευάσετε (αν είναι εφικτό) με χάρακα και διαβήτη.
○ Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει μήκη πλευρών $ΑΒ = 5\ cm$, $ΑΓ = 8\ cm$ και $ΒΓ = 10\ cm$.
○ Το τρίγωνο $ΔΕΖ$ έχει μήκη πλευρών $ΔΕ = 5\ cm$, $ΑΓ = 8\ cm$ και $ΒΓ = 14\ cm$.
Απαντώ στις ερωτήσεις:
• Ποια βασική ανισοτική σχέση ισχύει σε κάθε τρίγωνο;
• Γιατί είναι αναγκαία η χρήση του διαβήτη σε μία κατασκευή ενός τριγώνου του οποίου γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του;</td>
</tr>
</table>

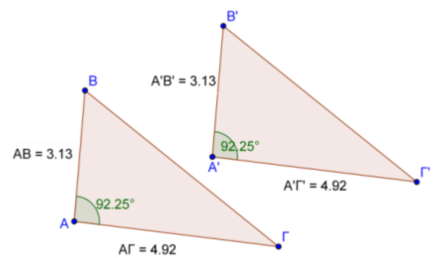
ξύ ευθύγραμμων τμημάτων, σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο/ευθεία, σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, κάθετες ευθείες , απόσταση σημείου από ευθεία, χάραξη παράλληλων ευθειών, μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος). • **Γ6.1 Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο (πλευρών και γωνιών).** • **Γ5.6 Ορίζουν αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την έννοια της ισότητας επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων**	πλευρά $ΑΓ$ του τριγώνου. • Να διατάξετε κατά αύξουσα (ή φθίνουσα) σειρά τις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$,όταν είναι γνωστά τα μέτρα των γωνιών του, όπως $Α = 80^\circ, Β = 70^\circ$ και $Γ = 30^\circ$. • Να διατάξετε τις γωνίες ενός τριγώνου, όταν είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών του, όπως $ΑΒ = 20\ cm, ΒΓ = 18\ cm$ και $ΑΓ = 22\ cm$. **Νέες έννοιες:** • **Ίσα σχήματα** είναι τα σχήματα τα οποία με κατάλληλη μετατόπιση μπορούν να συμπέσουν. • **Κριτήρια ισότητας τριγώνων** είναι προτάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων. ➢ Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα $(Π - Π - Π)$. ➢ Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα $(Π - Γ - Π)$. ➢ Αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα $(Γ - Π - Γ)$.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς και συμβολισμούς και χρησιμοποιώ ορθά μαθηματικές προτάσεις. για να επικοινωνώ με άλλους. Κάνω γεωμετρικές κατασκευές, συζητώ με συμμαθητές μου και αιτιολογώ προτάσεις δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα.* **Παραδείγματα:** • Πώς θα εξηγήσετε με βάση τον ορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ότι είναι και παραλληλόγραμμο; • Ποιες ιδιότητες παρουσιάζουν οι πλευρές και οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου; • Μπορούμε να αναγνωρίσουμε κάποιο είδος συμμετρίας στις πλευρές ενός παραλληλογράμμου; • Τι ονομάζουμε πολύεδρο; • Πώς ορίζονται οι ακμές και οι κορυφές σε ένα πολύεδρο; • Πότε δύο ευθείες στο χώρο είναι ασύμβατες; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Γνωρίζω τον ορισμό των παραλληλογράμμων και των ειδικών παραλληλογράμμων;* • *Ποιες ιδιότητες προκύπτουν από τον ορισμό του παραλληλογράμμου;* • *Πώς χρησιμοποιώ το χώρο για να εξηγήσω βασικές έννοιες στερεομετρίας;* • *Ποια παραδείγματα μπορώ να δώσω ώστε να στηρίξω ορισμούς στη στερεομετρία;*

(ίσα σχήματα , ίσα τρίγωνα, κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων, κριτήρια ισότητας ορθογώ-νιων τριγώνων) • **Γ4.7 Επεξηγούν τις απαραίτητες συν-θήκες για την ισό-τητα δύο σχημάτων και αναγνωρίζουν ίσα τρίγωνα.** • **Γ4.8 Διατυπώνουν υποθέσεις για σχέ-σεις ισότητας και ομοιότητας μεταξύ γεωμετρικών σχη-μάτων και ελέγ-χουν τις υποθέσεις τους, χρησιμοποι-ώντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.** • **Γ5.1 Χρησιμοποι-ούν επαγωγικό**	• **Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν ισχύει ένα από τα πιο κάτω: ➢ Έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία $(\Pi - \Pi - O)$. ➢ Έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες $(\Pi - \Gamma - O)$. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες στους μαθητές για να κατανοήσουν την έννοιας της ισότητας τριγώνων και να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα κριτήρια για τη σύγκριση τριγώνων. **Παραδείγματα: Ίσα σχήματα** • Να διαπιστώσετε κατά πόσο δύο χάρτινες τριγωνικές κάρτες είναι ίσες ή όχι (χωρίς να κάνετε μετρήσεις). • Να δικαιολογήσετε γιατί η πιο πάνω διαδικασία δεν μπορεί να επαναληφθεί, όταν η σύγκριση μεταξύ των τριγώνων αναφέρεται σε οικόπεδα με τριγωνικό σχήμα. • Να συγκρίνετε τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων: 	**ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς κανόνες και κριτήρια για να λύσω προβλήματα σε πιο σύνθετα σχήματα. Παρατηρώ σύνθετα σχήματα και στοιχεία ως μέρη ενός όλου.* **Παραδείγματα:** • Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες είναι παραλληλόγραμμο. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Γνωρίζω το άθροισμα γωνιών ενός τετραπλεύρου;* • *Γνωρίζω πώς σχετίζονται οι παράλληλες ευθείες με τη θέση των εντός και επί τα αυτά γωνιών;* • Να κατασκευάσετε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, $AB\Delta\Gamma$, όταν μας δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma,\ A = 90^{\circ}$. *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Γνωρίζω τα κριτήρια ορθογωνίου παραλληλογράμμου;* **ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ και κατανοώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων. Δίνω σημασία στις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παραδείγματα:** • Γιατί σε ένα τυχαίο τρίγωνο το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου έχει σταθερά δύο βασικές ιδιότητες; Είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. Πως μπορούμε

συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.

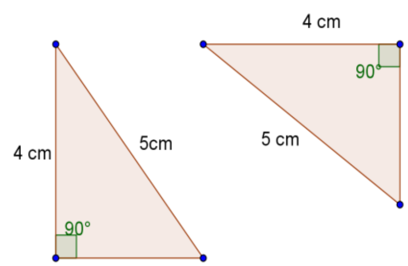
- **Γ5.2 Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.**
- **Γ4.14 Κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και υπολογίζουν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή σημείου και ευθείας σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.**
- **Γ6.7Διερευνούν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν την εξίσωση ευθείας, τη**





Παράδειγμα : Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων

- Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, αναφέροντας το κατάλληλο κριτήριο.



να το αποδείξουμε και να το αιτιολογήσουμε;

- Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΓ > ΑΒ$ παίρνουμε σημείο $Δ$ πάνω στην $ΑΓ$, ώστε $ΑΔ = ΑΒ$. Αν $ΑΕ$ είναι η διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ισοσκελές.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Γνωρίζω τους ορισμούς τα κριτήρια και τις ιδιότητες στα παραλληλόγραμμα;*
- *Έχω τη δυνατότητα να φέρω βοηθητικές γραμμές;*
- *Γνωρίζω τα κριτήρια των ισοσκελών τριγώνων;*

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

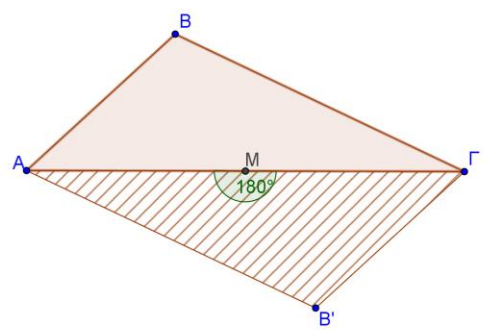
Διαβάζω το πρόβλημα προσεκτικά. Κατανοώ όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος. Ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

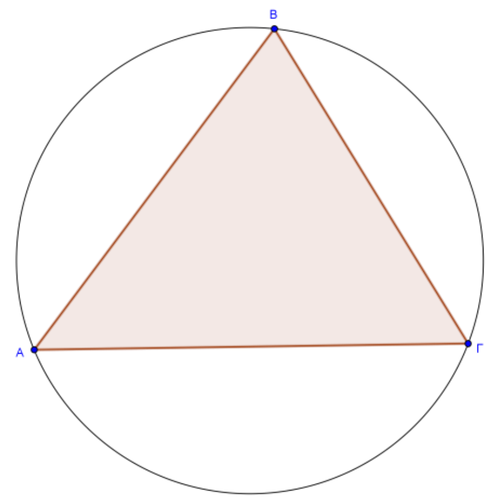
Παραδείγματα:

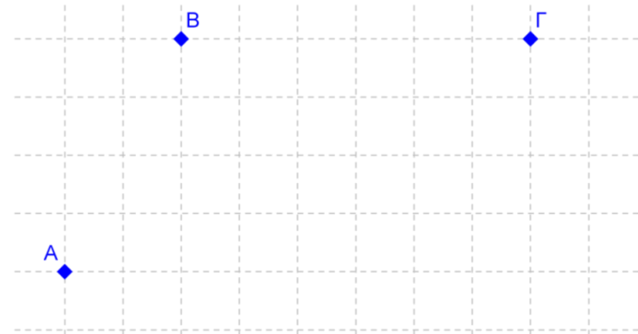
- Γιατί η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντοτε ίση με το μισό της υποτείνουσας του;
- Γιατί σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, όταν η μία οξεία γωνία του είναι 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;
- Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι τα ΔΕ και ΒΖ χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη.

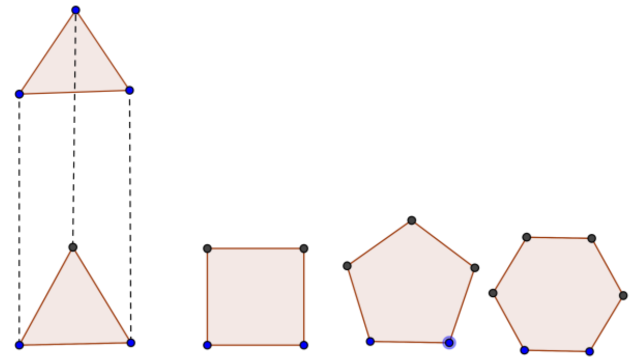
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Γνωρίζω τα κριτήρια και τις ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;*
- *Γνωρίζω το θεώρημα για το ευθύγραμμο τμήμα που*

θέση ευθειών, την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, την απόσταση σημείου από ευθεία, τις συντεταγμένες του μέσου ευθύγραμμου τμήματος, τη γωνία ευθειών και το εμβαδόν τριγώνου σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. • **Γ5.8 Αναγνωρίζουν, κατασκευάζουν βασικά είδη τετραπλεύρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο), αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους στη λύση προβλημάτων.**	**Παραδείγματα: Κριτήρια ισοσκελών τριγώνων** • Να αναφέρετε τα κριτήρια ισοσκελών τριγώνων. • Να αποδείξετε την πρόταση: «Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος του AM είναι και ύψος, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ορισμοί και ιδιότητες παραλληλογράμμων και τραπεζίων **Νέες γνώσεις:** ✓ **Κριτήρια παραλληλογράμμου:** Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις: ➢ Ο ορισμός του (Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες) ➢ Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες ➢ Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες ➢ Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες ➢ Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται ✓ **Κριτήρια ορθογώνιου παραλληλογράμμου:** Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις: ➢ Έχει τρεις γωνίες ορθές ➢ Όλες οι γωνίες του είναι ίσες ➢ Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία ➢ Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.	*ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου;* **ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων.** *Επεξηγώ την σκέψη μου και λαμβάνω υπόψη τη γνώμη των άλλων.* **Παραδείγματα:** • Να εξηγήσετε γιατί όταν ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος και ορθογώνιο, τότε είναι τετράγωνο. • Σε ένα τριγωνικό χαρτόνι $AB\Gamma$ τοποθετούμε μία πινέζα στο μέσο Μ της πλευράς $B\Gamma$.Αν περιστρέψουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ γύρω από το M κατά 180°το τρίγωνο μεταφέρεται στο τρίγωνο $A\Gamma B'$. Να αναφέρετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma B'$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.  • Γιατί κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ισαπέχει από τα άκρα του A και B; • Γιατί δύο ασύμβατες ευθείες αφού δεν τέμνονται, δεν είναι παράλληλες;

• **Γ5.15 Επεξηγούν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες τριγώνων και τετραπλεύρων σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.** • **Γ3.8 Διακρίνουν τις μεταβλητές και μη ιδιότητες ενός σχήματος και συγκρίνουν τάξεις σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους.** • **Γ4.12 Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων στην επίλυση και μοντελοποίηση προβλημάτων.** • **Γ4.6 Διερευνούν βασικά θεωρήματα τετραπλεύρων (π.χ. το ευθύγραμμο**	✓ **Κριτήρια ρόμβου:** Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις: ➢ Έχει όλες τις πλευρές του ίσες (ορισμός) ➢ Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ➢ Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα ➢ Είναι παραλληλόγραμμο και η μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του ✓ **Κριτήρια τετραγώνου:** Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Συγκεκριμένα αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις: ➢ Είναι ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ➢ Είναι ορθογώνιο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα ➢ Είναι ορθογώνιο και η μία διαγώνιος του διχοτομεί μία γωνία του ➢ Είναι ρόμβος και μία γωνία του είναι ορθή ➢ Είναι ρόμβος και οι διαγώνιοί του είναι ίσες Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές να αποδείξουν και να χρησιμοποιήσουν τα κριτήρια των παραλληλογράμμων για να επιλύσουν προβλήματα. **Παράδειγμα: Διάκριση ιδιότητας - κριτηρίου** • Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις αποτελεί κριτήριο για τα παραλληλόγραμμα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Γνωρίζω όλα τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα;* • *Γνωρίζω κριτήρια για τα ισοσκελή τρίγωνα;* • *Γνωρίζω τους ορισμούς των παράλληλων και ασύμβατων ευθειών; Μπορώ να διακρίνω διαφορές μεταξύ τους;* **ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Κατασκευάζω κατάλληλο σχήμα για να ερμηνεύσω ένα πρόβλημα.* **Παραδείγματα:** • Σε κύκλο είναι εγγεγραμμένο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Να κατασκευάσετε το κέντρο του κύκλου.  *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποια βασική ιδιότητα έχουν όλα τα σημεία της μεσοκάθετης ως προς τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος;*

τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της). • **Γ5.1 Χρησιμοποιούν επαγωγικό συλλογισμό, για να διερευνήσουν υποθέσεις και να δώσουν αντιπαραδείγματα.** • **Γ5.2 Αποδεικνύουν γεωμετρικές προτάσεις με παραγωγικό συλλογισμό.** • **Γ4.13 Περιγράφουν σχέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο (π.χ. ασύμβατες ευθείες, τρόποι τομής τριών επιπέδων).**	➢ Σε ένα παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. ➢ Το τετράπλευρο στο οποίο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο. **Παραδείγματα: Απόδειξη κριτηρίων παραλληλογράμμων** • Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο. • Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο στο οποίο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο. • Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο στο οποίο η μία διαγώνιος του διχοτομεί μία γωνία του είναι ρόμβος. • Να αποδείξετε ότι, το παραλληλόγραμμο στο οποίο οι διαγώνιοί του είναι ίσοι είναι ορθογώνιο. **Νέες Γνώσεις** ✓ Ειδικά Θεωρήματα στα τρίγωνα: ➢ Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της. ➢ Αν μια ευθεία διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου. ➢ Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.	• Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται σε ένα χάρτη τα τρία σημεία A, B, Γ που αντιπροσωπεύουν τρεις διαφορετικές πόλεις. Να υποδείξετε τη θέση ενός σημείου Δ, όπου θα τοποθετηθεί υδραγωγείο για τις ανάγκες των τριών πόλεων, έτσι ώστε να απέχει και από τις τρεις πόλεις εξίσου.  **ΜΠ.8 Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό** *Διακρίνω επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς και γενικεύσεις.* **Παραδείγματα:** (α) Τα τέσσερα πρίσματα που θα κατασκευαστούν πιο κάτω έχουν βάσεις σε σχήμα : τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο και εξάγωνο. Είναι φανερό ότι μεταβάλλοντας το πλήθος των πλευρών της βάσης μεταβάλλεται επίσης το πλήθος των εδρών (E), των κορυφών (K) και των ακμών (A). Έχει διαπιστωθεί, ότι η ποσότητα $K + E - A$ μένει σταθερή σε κάθε πρίσμα. Να υπολογίσετε την σταθερή ποσότητα και να

• **Γ5.14 Ορίζουν και εφαρμόζουν έννοιες στο χώρο (ευθεία, επίπεδο, θέσεις ευθείας και επιπέδου, σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου).** • **Γ5.17 Σχεδιάζουν σε ισομετρικό χαρτί και στον υπολογιστή στερεά και συμπληρώνουν αναπτύγματα, για να κατασκευάζουν στερεά.** • **Γ5.18 Σχεδιάζουν στερεά σε τετραγωνισμένο χαρτί, όταν γνωρίζουν τις τρεις βασικές όψεις τους.**	➢ Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας (και αντίστροφα). Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει κατάλληλες δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν, να αποδείξουν και να εφαρμόσουν ειδικά Θεωρήματα στα τρίγωνα με βάση τις ιδιότητες και τα κριτήρια των παραλληλογράμμων. **Παραδείγματα: Απόδειξη και εφαρμογή ειδικών Θεωρημάτων στα τρίγωνα** • Να αναφέρετε και να αποδείξετε το σχετικό θεώρημα για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου. • Να αποδείξετε γιατί η διάμεσος που άγεται από την ορθή γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντα το μισό της υποτείνουσάς του. **Νέες έννοιες** ✓ **Κριτήρια ισοσκελούς** τραπεζίου: Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές αν ισχύει ένα από τα πιο κάτω: ➢ Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες ➢ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες ✓ Η διάμεσος του τραπεζίου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του. ✓ Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.	εξετάσετε κατά πόσο ισχύει και σε άλλα πρίσματα προσπαθώντας να δώσετε την δική σας εξήγηση.  (β) Ποια κοινή ονομασία θα δίνατε στα πιο κάτω τετράπλευρα, όταν έχουν τις ιδιότητες: ○ Είναι ρόμβος και ορθογώνιο συγχρόνως ○ Είναι παραλληλόγραμμο και έχει ίσες διαγώνιους ○ Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα ○ Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα και είναι ίσοι μεταξύ τους *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Πώς χρησιμοποιώ τα γνωστά κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα, για να αποδείξω σχετικά κριτήρια για ειδικά παραλληλόγραμμα;*

	Ο εκπαιδευτικός αναμένει από τους μαθητές να αναφέρουν και να μπορούν να αποδεικνύουν τα σχετικά κριτήρια ισοσκελούς τραπεζίου και ιδιότητες. **Παραδείγματα: Απόδειξη κριτηρίων ισοσκελών τριγώνων** • Να αποδείξετε ότι, αν σε ένα τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές. • Αν σε ένα τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε οποιαδήποτε από τις δύο βάσεις του είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές. **Παράδειγμα: Διάμεσος τραπεζίου** • Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο η διάμεσός του είναι παράλληλη με τις δύο βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Αναγνώριση στερεών σχημάτων, όπως κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πρίσματα, πυραμίδες κύλινδροι και κώνοι. ✓ Αναγνώριση χαρακτηριστικών στοιχείων στα πρίσματα, όπως ακμές κορυφές και έδρες. ✓ Αναγνώριση αναπτυγμάτων βασικών στερεών, όπως κύβος πυραμίδα, κύλινδρος και πρίσμα. **Νέες έννοιες:** ✓ **Σχετικές θέσεις** δύο ευθειών στον χώρο: Δύο ευθείες (ε) και (ζ) του χώρου μπορεί ➢ να είναι **παράλληλες,** δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο ε-	

	πίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. ➢ να **τέμνονται**, να ανήκουν δηλαδή στο ίδιο επίπεδο και να έχουν ένα κοινό σημείο ➢ να είναι **ασύμβατες**, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο ✓ **Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου** ➢ Μια ευθεία μπορεί να ανήκει σε ένα επίπεδο, δηλαδή όλα τα σημεία της ανήκουν στο επίπεδο. ➢ Μια ευθεία μπορεί να είναι παράλληλη με ένα επίπεδο, δηλαδή η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο. ➢ Μια ευθεία μπορεί να τέμνει ένα επίπεδο, δηλαδή έχει ένα μόνο κοινό σημείο. (Το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π λέγεται ίχνος της ευθείας ε στο Π). Μια ευθεία ε είναι **κάθετη** σε ένα επίπεδο Π, αν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου η οποία διέρχεται από το ίχνος της ε στο Π. ✓ **Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων στον χώρο** Δύο επίπεδα του χώρου μπορεί: ➢ Να είναι **παράλληλα**, δηλαδή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο ➢ Να **τέμνονται(**Η τομή δύο επιπέδων είναι μία ευθεία)	

	✓ **Πολύεδρο** είναι ένα στερεό που περικλείεται από επίπεδες επιφάνειες με κάθε επιφάνεια να ορίζεται από ευθύγραμμα τμήματα, δηλαδή πολύγωνα ✓ Καθεμιά από τις επίπεδες επιφάνειες λέγεται **έδρα** και καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα των πολυγώνων λέγεται **ακμή**. Το σημείο τομής δύο ακμών λέγεται **κορυφή.** Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί το χώρο της τάξης για να διερευνήσουν οι μαθητές τις πιθανές θέσεις δύο ευθειών, τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου και τις σχετικές θέσεις δύο επιπέδων γενικά στο χώρο. Συνδυάζει τις προηγούμενες γνώσεις για να ορίσουν οι μαθητές τα πολύεδρα και να εξετάσουν τα κύρια χαρακτηριστικά του. **Παραδείγματα: Ευθείες στο χώρο** • Να δώσετε παραδείγματα στο χώρο της τάξης σας με παράλληλες, τεμνόμενες και ασύμβατες ευθείες. • Πότε μία ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο; • Πώς ονομάζεται η τομή δύο επιπέδων; • Πώς ονομάζεται η τομή δύο εδρών σε ένα πολύεδρο; Να αναφέρετε τον αριθμό των ακμών, των κορυφών και των εδρών σε ένα κύβο, και ένα τετράεδρο.	

<table>
<tr><th colspan="3">ΜΕΤΡΗΣΗ</th></tr>
<tr><th>Δείκτες Επιτυχίας</th><th colspan="2">Δείκτες Επάρκειας</th></tr>
<tr><th></th><th>Επίπεδα Δραστηριοτήτων</th><th>Μαθηματικές Πρακτικές</th></tr>
<tr>
<td>

- **Μ4.8 Χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, για να κατανοούν και να αποδεικνύουν σχέσεις.**

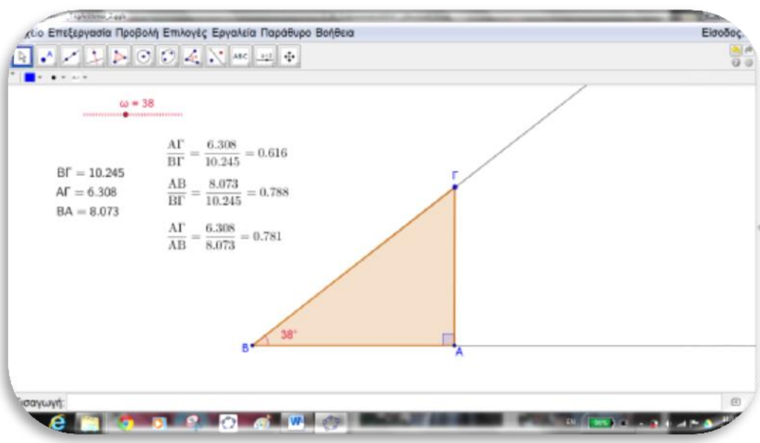
</td>
<td>

Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές:

- να χρησιμοποιούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με στόχο την ανακάλυψη των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.

Παράδειγμα: Χρήση Λογισμικών

- Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«C_En5_TrigArithmoi.ggb»*, για να διερευνήσετε τη σχέση που συνδέει το πηλίκο των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, όπως φαίνονται στο εφαρμογίδιο.

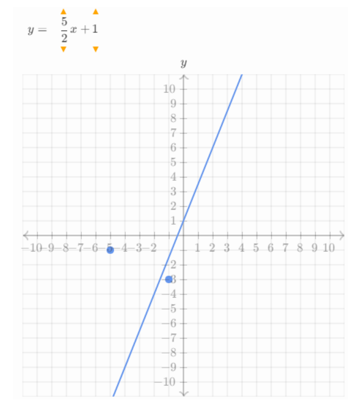


</td>
<td>

ΜΠ.5 Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων

Χρησιμοποιώ τα εργαλεία των Μαθηματικών (γραφική παράσταση ή κατάλληλο εφαρμογίδιο) για να εξερευνώ και να αντιλαμβάνομαι τον κόσμο.

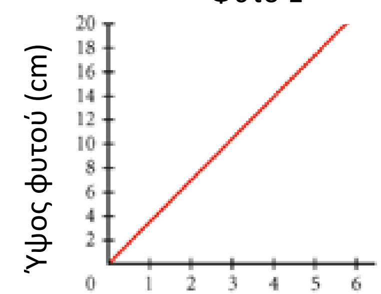
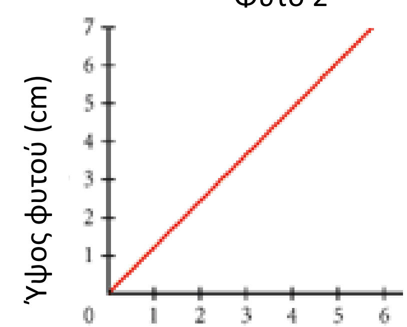
Παράδειγμα: Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο εφαρμογίδιο για να ανακαλύψετε τον ρόλο των μεταβλητών α και β στην εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

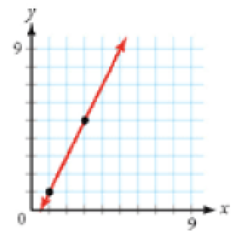
- *Ποια εκτίμηση κάνω για να οδηγηθώ στη λύση;*
- *Τι μπορεί να μου δείξει το εφαρμογίδιο που δε θα μπορούσα να δω με μια απλή κατασκευή με γεωμετρικά όργανα;*

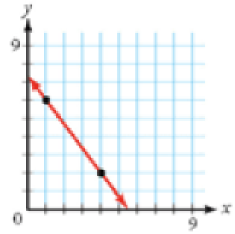
</td>
</tr>
</table>

• **Μ5.11 Υπολογίζουν το συντελεστή κατεύθυνσης (κλίση) ευθείας και επεξηγούν τη σχέση μεταξύ της κλίσης μιας ευθείας και του ρυθμού μεταβολής.** • **Μ6.10 Κατασκευάζουν και χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις σε προβλήματα κίνησης.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Εξίσωση Ευθείας , Κλίση, Ρυθμός Μεταβολής ✓ Συνθήκη Παραλληλίας, Συνθήκη Καθετότητας, Συνθήκη για να συμπίπτουν δύο ευθείες ✓ Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνίας Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες έτσι ώστε οι μαθητές: • να υπολογίζουν την κλίση μιας ευθείας • να αναγνωρίζουν τη σχετική θέση δύο ευθειών και να βρίσκουν κατάλληλες τιμές παραμέτρων ώστε δύο ευθείες να πληρούν τη συνθήκη παραλληλίας, καθετότητας ή να συμπίπτουν • να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις της απόστασης συναρτήσει του χρόνου και να επιλύουν προβλήματα με βάση τη γραφική παράσταση **Παραδείγματα: Υπολογισμός κλίσης ευθείας** • Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία: α. $A\ (2,5)\ και\ B(3,-2)$ β. $A\ (1,3)\ και\ B(1,-5)$ γ. $A\ (2,-4)\ και\ B(3,-4)$ • Να υπολογίσετε την κλίση των πιο κάτω ευθειών: α. $y\ = 3x$ β. $y = 3$ γ. $x = -2$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω με ακρίβεια μαθηματικές απαντήσεις κατάλληλες σύμφωνα με το πλαίσιο του προβλήματος και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις δείχνουν τον ρυθμό ανάπτυξης τριών διαφορετικών φυτών. Φυτό 1  Μέρες Φυτό 2  Μέρες

δ. $2x + y = 3$
ε. $y = -3x + 5$

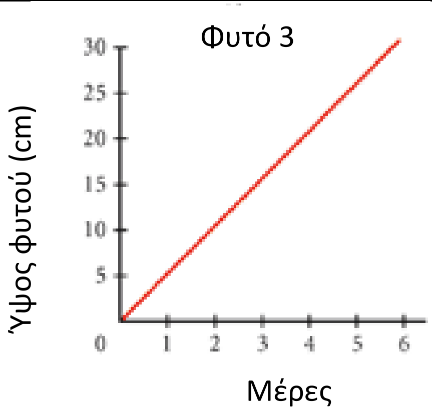
- Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας $2x = 2y + 5$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων.
- Να υπολογίσετε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:

α. 

β. 

Παραδείγματα: Συνθήκη παραλληλίας και συνθήκη καθετότητας

- Να σημειώσετε ποιες από τις πιο κάτω ευθείες είναι μεταξύ τους:
  α. Παράλληλες
  β. Κάθετες
  I. $y = 2x - 3$
  II. $y = -2x + 3$
  III. $y = 2x$
  IV. $2x + y = 5$
  V. $x = 2y - 3$
- Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 5x - 2$ και $\varepsilon_2: y = (2\alpha - 1)\,x - 6$ να είναι παράλληλες.



α. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρία φυτά έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης.
β. Ποιο από τα φυτά έχει μεγαλύτερο ύψος την τέταρτη μέρα;
γ. Ποιο φυτό έφτασε το ύψος των 5 cm πιο αργά;
δ. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις σε κοινό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να συγκρίνετε το ρυθμό ανάπτυξής τους.

Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς θα μπορούσα να ελέγξω τις απαντήσεις μου, για να δω αν δίνουν λύση στο πρόβλημά μου;*
- *Ποιες ιδιότητες θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω, για να εξηγήσω πώς βρήκα την απάντησή μου;*

	• Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - \beta y = 6$ και $\varepsilon_2: (\alpha - 2)\, x - 3y = 4$ να συμπίπτουν. **Παράδειγμα: Γραφική παράσταση σε πρόβλημα κίνησης** • Να παραστήσετε γραφικά τις πληροφορίες του πιο κάτω προβλήματος (με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού) και να επιλύσετε το πρόβλημα με βάση τη γραφική παράσταση: Η απόσταση της πόλης A από την πόλη B είναι $580\ km$. Ένα λεωφορείο αναχώρησε από την πόλη A στις $8{:}\,20\ \pi.\mu.$ και αφού έκανε ενδιάμεσα μια στάση 40 λεπτών, έφθασε στην πόλη B στις $4{:}\,15\ \mu.\mu.$ Ποια ήταν η μέση ταχύτητα του λεωφορείου;	
• **Μ5.8 Χρησιμοποιούν και εφαρμόζουν με ευχέρεια τις μονάδες μέτρησης του μήκους, του χρόνου, του εμβαδού, της μάζας, του όγκου, κτλ. και κατανοούν την**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Εμβαδόν και Περίμετρος Τετραγώνου, Ορθογωνίου, Παραλληλογράμμου, Τριγώνου, Ρόμβου, Τραπεζίου, Κύκλου ✓ Κορυφή, Ακμή, Έδρα ✓ Αναγνώριση αναπτυγμάτων στερεών σχημάτων ✓ Ορισμός Πολυέδρου, Πρίσματος, Ορθού Πρίσματος, Ορθογωνίου Παραλληλεπιπέδου, Κύβου, Πυραμίδας, Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, Κυλίνδρου, Κώνου, Σφαίρας	**ΜΠ.7 Δομή των μαθηματικών** *Εφαρμόζω γενικούς μαθηματικούς κανόνες για να εξηγήσω γεωμετρικούς συλλογισμούς.* **Παράδειγμα:** Να εντοπίσετε το λάθος. Η Νατάσα και η Μιράντα έγραψαν τις πιο κάτω λύσεις για να βρουν τον όγκο μιας σφαίρας με ακτίνα 12 cm. Ποια είναι σωστή; Εξηγήστε τη σκέψη σας. **Νατάσα** $V = \frac{4}{3}\pi(12)^3$ $V = 4\pi(4)^3$ $V = 256\pi\ cm^3$ **Μιράντα** $V = \frac{4}{3}\pi(12)^3$ $V = \frac{4}{3}\pi.1728$ $V = 2304\pi\ cm^3$

ισοδυναμία μετρήσεων (π.χ. 1 cm3 νερού είναι ισοδύναμο με 1 ml νερού). • **Μ5.4 Ανακαλύπτουν, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τύπους για την εύρεση του εμβαδού επίπεδων σχημάτων, της επιφάνειας και του όγκου στερεών.** • **Μ6.8 Εφαρμόζουν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου τρισδιάστατων**	**Νέες Έννοιες:** ✓ **Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος** $E_\pi = \Pi_\beta . \upsilon$ ✓ **Εμβαδόν ολικής επιφάνειας πρίσματος** $E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta$ ✓ **Όγκος πρίσματος** $V = E_\beta . \upsilon$ ✓ **Διαγώνιος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου** $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ ✓ **Εμβαδόν ολικής επιφάνειας ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου** $E_{o\lambda} = 2(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma)$ ✓ **Όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου** $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$ ✓ **Διαγώνιος κύβου** $\delta = \alpha\sqrt{3}$ ✓ **Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου** $E_{o\lambda} = 6\,\alpha^2$ ✓ **Όγκος κύβου** $V = \alpha^3$	*Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιες μαθηματικές έννοιες είναι χρήσιμες στην επίλυση του προβλήματος;* • *Με ποιους τρόπους συνδέεται το πρόβλημα με άλλες μαθηματικές έννοιες;* • *Ποια άλλα προβλήματα είναι παρόμοια με αυτό;* **ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές υποθέσεις, ορισμούς και αποτελέσματα για την ανάπτυξη ισχυρισμών.* **Παράδειγμα:** Να περιγράψετε την επίδραση που θα έχει στον όγκο μιας πυραμίδας, αν διπλασιαστεί η πλευρά της βάσης και το ύψος της. Να περιγράψετε την επίδραση που θα έχει στον όγκο ενός κώνου, αν διπλασιαστεί η ακτίνα και το ύψος του. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς σχετίζεται ο όγκος του κώνου με την ακτίνα της βάσης του;* • *Πώς σχετίζεται ο όγκος του κώνου με το ύψος του;* • *Πώς σχετίζεται ο όγκος της πυραμίδας με την πλευρά της βάσης του;* • *Πώς σχετίζεται ο όγκος της πυραμίδας με το ύψος του;*

<table>
<tr>
<td>

σχημάτων.

- **M5.2 Υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν επίπεδων επιφανειών, το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο στερεών σχημάτων.**
- **M5.1 Κάνουν λογικές εκτιμήσεις αποστάσεων, εμβαδών και όγκου και εκτιμούν το σφάλμα των εκτιμήσεών τους.**
- **M5.3 Διερευνούν και εφαρμόζουν σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων**

</td>
<td>

✓ **Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας**

$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta . h}{2}$$

✓ **Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας**

$$E_{ολ} = E_\pi + E_\beta$$

✓ **Όγκος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας**

$$V = \frac{E_\beta . υ}{3}$$

✓ **Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου**

$$E_\kappa = 2\pi R υ$$

✓ **Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου**

$$E_{ολ} = 2\pi R υ + 2\pi R^2$$

✓ **Όγκος κυλίνδρου**

$$V = \pi R^2 . υ$$

✓ **Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας κώνου**

$$E_\kappa = \pi R \lambda$$

✓ **Εμβαδόν ολικής επιφάνειας κώνου**

$$E_{ολ} = \pi R \lambda + \pi R^2$$

✓ **Όγκος κώνου**

$$V = \frac{\pi R^2 . υ}{3}$$

✓ **Εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας**

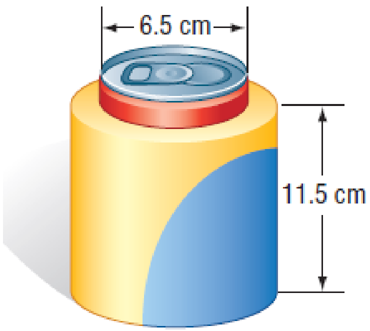
$$E_{σφ} = 4\pi R^2$$

</td>
<td>

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

Σχηματίζω μαθηματικές εκφράσεις από πραγματικά προβλήματα και τα μεταφράζω σε συμβολική αναπαράσταση επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.

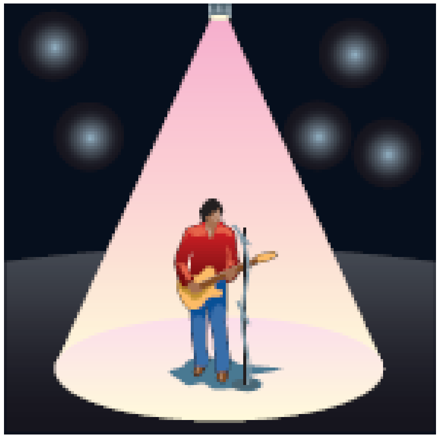
Παράδειγμα: Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η μια πλαστική θήκη αναψυκτικού που χωράει ένα τενεκεδάκι με ύψος $12 cm$ και διάμετρο 6,5 cm. Η πλαστική θήκη εφαρμόζει ακριβώς γύρω από το αναψυκτικό. Το ύψος της θήκης είναι 11,5 cm και το πάχος της 1 cm (και η βάση της έχει πάχος 1 cm). Ποιος είναι ο όγκος του πλαστικού υλικού που χρειάζεται για να κατασκευαστεί μια τέτοια θήκη;

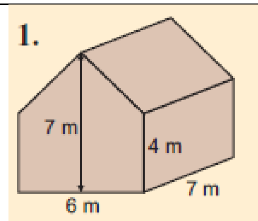


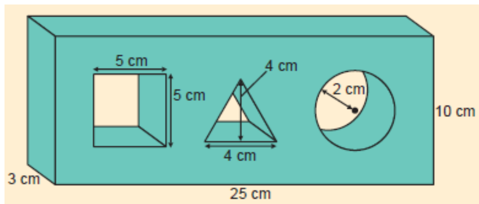
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιο αριθμητικό μοντέλο μπορώ να κατασκευάσω για να αναπαραστήσω το πρόβλημα;*
- *Πώς θα βοηθούσε αν κατασκεύαζα μια σχηματική αναπαράσταση;*

</td>
</tr>
</table>

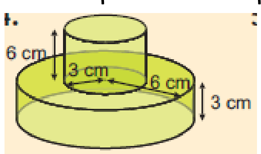
συγκεκριμένων σχημάτων και του εμβαδού ή/και όγκου τους. • **Μ4.10 Περιγράφουν το αποτέλεσμα της μεταβολής της ακμής ενός τρισδιάστατου σχήματος στο εμβαδόν και στον όγκο του.**	✓ **Όγκος της σφαίρας** $$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$ Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να διερευνούν τον τρόπο εύρεσης του όγκου και της ολικής επιφάνειας πρισμάτων και της πυραμίδας • να υπολογίζουν εμβαδόν ολικής επιφάνειας και όγκους πρισμάτων και πυραμίδας • να διερευνούν τον τρόπο εύρεσης του όγκου και της ολικής επιφάνειας στερεών εκ περιστροφής • να υπολογίζουν εμβαδόν ολικής επιφάνειας και όγκους στερεών εκ περιστροφής • να εφαρμόζουν κριτήρια επιλογής με βάση τον όγκο ή την ολική επιφάνεια στερεών • να επιλύουν προβλήματα που αφορούν τη μεταβολή στον όγκο ή στην επιφάνεια ενός σχήματος όταν μεταβάλλονται οι διαστάσεις του **Παραδείγματα: Υπολογισμός όγκων πρισμάτων** • Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω στερεών.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Η πιο κάτω εικόνα δείχνει έναν τραγουδιστή κατά τη διάρκεια μιας συναυλίας. Ένας προβολέας έχει τοποθετηθεί ακριβώς πάνω από τον τραγουδιστή. Αν η κυρτή επιφάνεια του κώνου που σχηματίζει το φως είναι 38 m^2 και η γενέτειρα του είναι 6 m, να υπολογίσετε το μήκος της διαμέτρου του κυκλικού δίσκου που σχηματίζει ο προβολέας πάνω στη σκηνή.  *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.* • *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;* • *Περιγράφω τη σχέση που συνδέει την κυρτή επιφάνεια του κώνου με τη διάμετρο του κύκλου.*

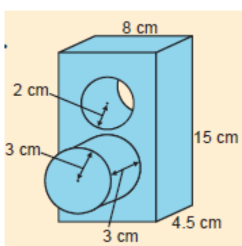
α. 

β. 

Παραδείγματα: Υπολογισμός όγκων στερεών εκ περιστροφής

- Να υπολογίσετε τον όγκο των πιο κάτω στερεών.

α. 

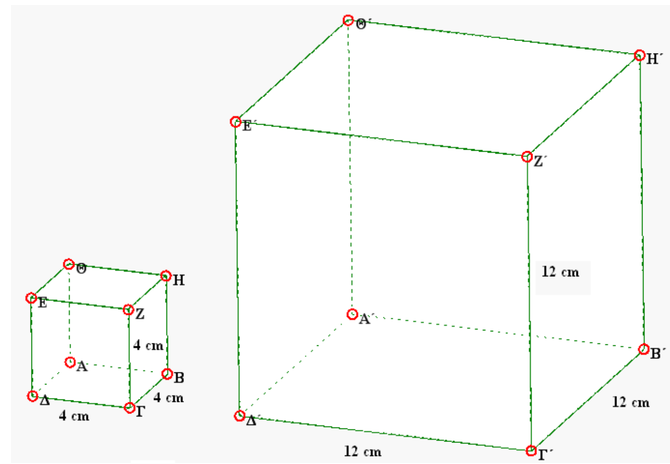
β. 

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Κατανοώ τις ποσότητες και τις σχέσεις μεταξύ τους.

Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.

Παράδειγμα: Ένας κύβος έχει μήκος ακμής 4 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κύβου, όταν κάθε ακμή του τριπλασιαστεί.



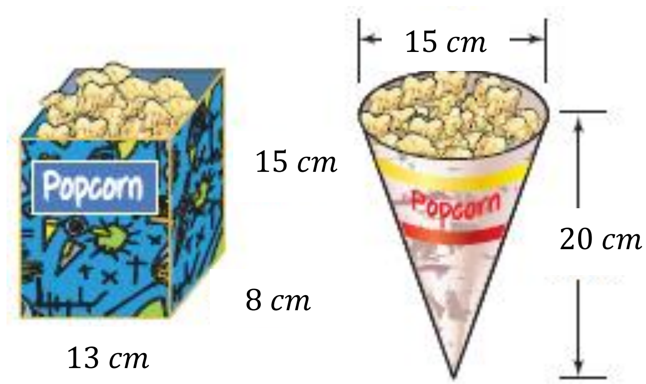
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Ποιες ιδιότητες μπορώ να χρησιμοποιήσω για να οδηγηθώ στη λύση;*
- *Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ακμής και του όγκου του κύβου;*
- *Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ακμής και του εμβαδού ολικής επιφάνειας του κύβου;*

- Να υπολογίσετε πόσο δέρμα θα χρειαστούμε για να καλύψουμε μια μπάλα ποδοσφαίρου με διάμετρο 22 cm.

Παραδείγματα: Σύγκριση όγκου ή ολικής επιφάνειας

- Να υπολογίσετε ποια από τις δύο συσκευασίες ποπ-κορν μας συμφέρει να αγοράσουμε αν και οι δύο πωλούνται στην ίδια τιμή.



Παραδείγματα: Προβλήματα μεταβολής διαστάσεων

- Να υπολογίσετε την μεταβολή στο εμβαδό ολικής επιφάνειας και στον όγκο ενός κύβου όγκου 64 cm^3, αν το μήκος της κάθε ακμής του αυξηθεί κατά 6 cm.

- **Μ6.8 Επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.**
- **Μ5.7 Μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς αριθμούς και το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίζουν αποστάσεις και γωνίες.**

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

✓ Λόγοι, Αναλογίες
✓ Πυθαγόρειο Θεώρημα
✓ Ονομασία πλευρών ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με μια οξεία γωνία του (Απέναντι κάθετη, Προσκείμενη Κάθετη, Υποτείνουσα)
✓ Ορισμοί Βασικών Τριγωνομετρικών Αριθμών (Ημίτονο, Συνημίτονο, Εφαπτομένη)

Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές:

- να επιλύουν προβλήματα με βάση τον ορισμό των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας.
- να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις για να υπολογίζουν γωνίες και αποστάσεις, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τον ορισμό των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών.

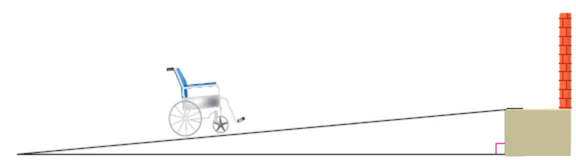
Παραδείγματα: Προβλήματα με βάση τον ορισμό των βασικών τριγωνομετρικών αριθμών:

- Να υπολογίσετε την τιμή του x σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Οι απαντήσεις σας να δοθούν σε προσέγγιση ακεραίου.

ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη

Κατανοώ τις ποσότητες και τις σχέσεις μεταξύ τους.
Χρησιμοποιώ την έννοια των μεταβλητών και των σταθερών ποσοτήτων, για να κατανοήσω προβλήματα.

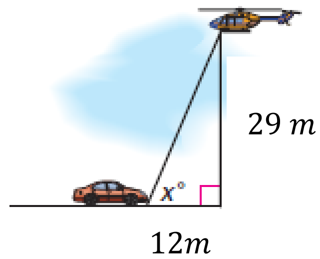
Παράδειγμα: Ο κύριος Πάτροκλος είναι επιπλοποιός και έχει προσληφθεί από το Πανεπιστήμιο Κύπρου για να κατασκευάσει μια ράμπα που θα επιτρέπει σε άτομα με τροχοκάθισμα πιο εύκολη πρόσβαση στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου. Η ράμπα θα πρέπει να έχει ύψος $60\ cm$. Να βοηθήσετε τον κύριο Πάτροκλο να βρει το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει η ράμπα με το πάτωμα, αν η ράμπα ξεκινά $7{,}3\ \ m$ μακριά από την είσοδο της βιβλιοθήκη. Να το στρογγυλοποιήσετε στο πλησιέστερο δεκαδικό.



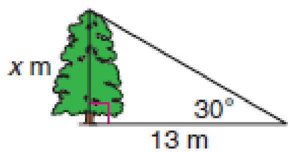
Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Πώς σχετίζεται η γωνία που σχηματίζει η ράμπα με το έδαφος με τα μήκη των πλευρών που αναφέρονται στο πρόβλημα;*
- *Μπορώ να χρησιμοποιήσω διαφορετική διαδικασία, για να επιλύσω το πιο πάνω πρόβλημα; Γιατί ή γιατί όχι;*

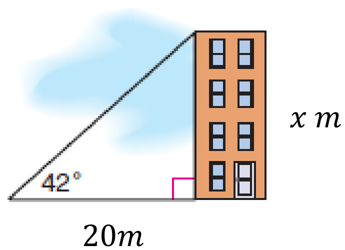
α.



β.



γ.



- Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και ΑΒΔ. Αν $ΒΔ = 4\ cm$, $ΑΔ = 8\ cm$ και $Β\hat{Α}Δ = Α\hat{Γ}Δ = \hat{φ}$. Να υπολογίσετε:

α. τα μήκη των πλευρών $ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ$.

β. τη γωνία $φ\hat{}$.

γ. το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΓΒΔ$.

ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος

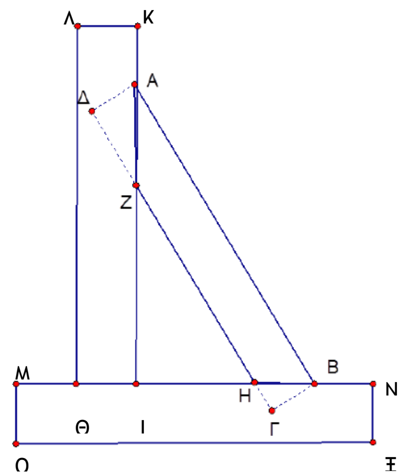
Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πως θα το λύσω και ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου.

Παράδειγμα: Ένας ξυλουργός θέλει να φτιάξει την κατασκευή που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο στύλος $ΘΙΚΛ$, πρέπει να είναι κάθετος με το έδαφος $ΜΝΞΟ$. Από το δοκάρι $ΑΒΓΔ$ μήκους 2 m, κόβει το τρίγωνο $ΑΔΒ$ σχηματίζοντας μια γωνία $\widehat{α} = Ζ\widehat{Α}Β = 30^Ο$. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία $\hat{β} = Η\widehat{Β}Α$ του τριγώνου $ΗΒΓ$ που πρέπει να κοπεί από το ξύλο.

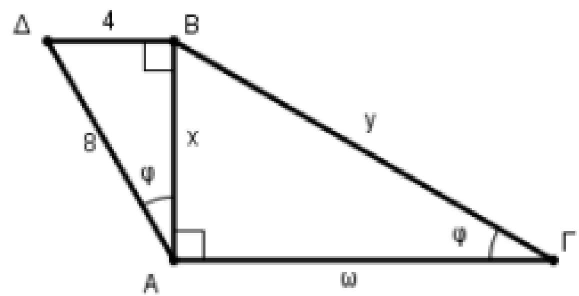
β. Την απόσταση $ΖΙ$.

γ. Την απόσταση $ΙΗ$.



Απαντώ στις ερωτήσεις:

- *Περιγράφω το πρόβλημα με δικά μου λόγια.*

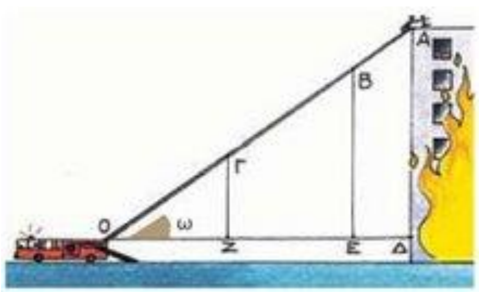


- *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;*
- *Περιγράφω τη σχέση που συνδέει τη γωνία κοπής $\widehat{\alpha}$ με το ύψος που πρέπει να τοποθετηθεί το δοκάρι πάνω στον στύλο.*

ΜΠ.4 Μοντελοποίηση

Σχηματίζω μαθηματικές εκφράσεις από πραγματικά προβλήματα και τα μεταφράζω σε συμβολική αναπαράσταση επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.

Παράδειγμα: Ένα πυροσβεστικό όχημα σταματά μπροστά από ένα κτίριο που φλέγεται, για να κατεβάσει έναν άνθρωπο που βρίσκεται στην οροφή του κτιρίου. Η σκάλα του οχήματος έχει μήκος $OA = 50\ m$ και το κτίριο έχει ύψος $A\Delta = 30\ m$. Ο πυροσβέστης που βρίσκεται στην άκρη της σκάλας σώζει τον άνθρωπο που κινδυνεύει και η σκάλα αρχίζει να μαζεύεται.



- Να υπολογίσετε σε ποια απόσταση πρέπει να βρίσκεται το πυροσβεστικό όχημα από το κτίριο.
- Να υπολογίσετε ποια θα πρέπει να είναι η γωνία που θα σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος έτσι ώστε το άκρο της να

		ακουμπά στην οροφή του κτιρίου. • Ποια θα έπρεπε να ήταν η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος, αν ο άνθρωπος που κινδύνευε ήταν στον $3^{\text{ο}}$ όροφο του κτιρίου, δηλ. σε ύψος $15\ m$; *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Ποιο αριθμητικό μοντέλο μπορώ να κατασκευάσω για να αναπαραστήσω το πρόβλημα;*
• **Μ5.9 Επιλύουν προβλήματα μέτρησης, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Λόγοι, Αναλογίες, Ποσοστά ✓ Ρυθμός μεταβολής ✓ Πυθαγόρειο Θεώρημα ✓ Ευθέως ανάλογα ποσά, Συντελεστής της αναλογίας, Αντιστρόφως ανάλογα ποσά Ο εκπαιδευτικός οργανώνει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να επιλύουν προβλήματα μέτρησης χρησιμοποιώντας διάφορους τρόπους επίλυσης. • να ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν πληροφορίες μεταβολής που παρουσιάζονται αριθμητικά, γραφικά ή σε πίνακες.	

	Παραδείγματα: Προβλήματα μέτρησης • Οι διαστάσεις ενός δωματίου είναι $4m$, $5\ m$ και $3m$. Ποια είναι η πιο μεγάλη απόσταση μέσα στο δωμάτιο; Να επεξηγήσετε την απάντησή σας. • Η κορυφή ενός ηφαιστείου είναι σήμερα 945 μέτρα κάτω από το επίπεδο της θάλασσας. Υπολογίζεται ότι θα περάσουν περίπου 51.000 έτη όταν η κορυφή του υπερβεί την επιφάνεια του νερού. Ποιο θα είναι τότε το ποσοστό αλλαγής στο ύψος του ηφαιστείου;	

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ		
Δείκτες Επιτυχίας	**Δείκτες Επάρκειας**	
	Επίπεδα Δραστηριοτήτων	**Μαθηματικές Πρακτικές**
• **ΣΠ5.3 Αναλύουν τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού και συζητούν για τη καταλληλότητα του τρόπου συλλογής των δεδομένων (εγκυρότητα, αξιοπιστία, αμεροληψία) και παρουσίασής τους.**	**Προαπαιτούμενες Γνώσεις:** ✓ Μεταβλητή, Παρατηρήσεις ✓ Δείγμα ✓ Συχνότητα, Πίνακας συχνοτήτων ✓ Ραβδόγραμμα, Ιστόγραμμα, Κυκλικό Διάγραμμα ✓ Μέση Τιμή, Διάμεσος, Επικρατούσα Τιμή **Νέες έννοιες:** ✓ **Πληθυσμός** είναι το σύνολο των ατόμων ή αντικειμένων στο οποίο επικεντρωνόμαστε σε μια έρευνα**.** ✓ **Απογραφή** ενός πληθυσμού λέγεται η διαδικασία κατά την οποία διερευνούμε τα χαρακτηριστικά για καθένα από τα μέλη του πληθυσμού. ✓ **Δειγματοληψία** ονομάζεται η διαδικασία επιλογής του δείγματος. ✓ **Μέθοδοι δειγματοληψίας** ➢ **Απλή Τυχαία Δειγματοληψία** ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία το δείγμα επιλέγεται τυχαία. ➢ **Συστηματική Δειγματοληψία** ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία το δείγμα επιλέγεται με έναν συστηματικό τρόπο. ✓ **Μεροληψία** ονομάζεται η κατάσταση κατά την οποία οι απαντήσεις στο δείγμα διαφέρουν από την πραγματική	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου και αιτιολογώ τα συμπεράσματά μου με μαθηματικές ιδέες. Ρωτώ διευκρινιστικές ερωτήσεις, για να εξακριβώσω αν ο ισχυρισμός βγάζει νόημα.* **Παράδειγμα:** Για να βρούμε ποιες εκπομπές στην τηλεόραση έχουν τη μεγαλύτερη ακροαματικότητα, αποφασίσαμε να πάρουμε δείγμα 500 τηλεθεατών. Ποιος είναι, ο καλύτερος από τους παρακάτω τρόπους, για να επιλέξουμε το δείγμα; Θα είναι καλύτερο να επιλέξουμε: α. μόνο άνδρες β. μόνο γυναίκες γ. άτομα από τις μεγάλες πόλεις δ. άτομα μόνο από την επαρχία ε. άτομα από διάφορες περιοχές *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Πώς μπορώ να είμαι σίγουρος για την ορθότητα του ισχυρισμού μου;* • *Πώς αιτιολογώ την απάντησή μου;*

	κατάσταση στον πληθυσμό. Πιθανές αιτίες της μεροληψίας είναι: ➢ Λανθασμένη επιλογή δείγματος ➢ Αποφυγή απάντησης από τους ερωτώμενους ➢ Οι ερωτήσεις καθοδηγούν τους ερωτώμενους να απαντούν με συγκεκριμένο τρόπο ➢ Οι ερωτώμενοι δεν απαντούν με ειλικρίνεια. Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες ώστε οι μαθητές: • να διακρίνουν τις έννοιες της συλλογής δεδομένων από το σύνολο του πληθυσμού (απογραφή) και της συλλογής δεδομένων από μέρος του πληθυσμού (δείγμα) • να αντιλαμβάνονται σε ποιες περιπτώσεις επιβάλλεται η επιλογή αντιπροσωπευτικού δείγματος • να συζητούν την καταλληλότητα του τρόπου συλλογής και παρουσίασης δεδομένων • να αντιλαμβάνονται σε ποιες περιπτώσεις τα δεδομένα είναι δυνατόν να είναι μεροληπτικά • να χρησιμοποιούν τα δεδομένα από το δείγμα για να κάνουν εκτιμήσεις για ολόκληρο τον πληθυσμό **Παράδειγμα: Διάκριση- συλλογή δεδομένων από απογραφή ή από μέρος του πληθυσμού** • Να εξηγήσετε σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** • Πώς ορίζεται ο πληθυσμός και πώς το δείγμα; • Πότε κατά τη γνώμη σας ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποια μαθηματική ορολογία θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω για να εξηγήσω τις απαντήσεις μου;* • *Πώς αιτιολογώ ότι οι απαντήσεις μου είναι λογικές;* **Μ.Π2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Δίνω προσοχή στη σημασία των ποσοτήτων και όχι μόνο στον υπολογισμό.* **Παράδειγμα:** Από τους 100 μαθητές της Γ τάξης ενός Λυκείου, εξετάσαμε 10 ως προς τον βαθμό τους στα μαθηματικά. Οι παρατηρήσεις ήταν: $14, 10, 09, 15, 18, 19, 19, 12, 10, 14$. Να απαντήσετε στα ερωτήματα*:* α. Ποιος είναι ο πληθυσμός; β. Ποιο είναι το δείγμα;

	κατά πόσο θα συλλέξετε δεδομένα από ολόκληρο τον πληθυσμό της έρευνας ή από δείγμα. α. Μια έρευνα που εξετάζει τον μέσο μισθό των εργατών στην Κύπρο. β. Μια έρευνα που εξετάζει το μέσο ύψος των μαθητών μιας τάξης. γ. Μια έρευνα που εξετάζει την τιμή των εισιτηρίων θεάτρου στην Κύπρο. **Παραδείγματα: Τρόπος συλλογής δεδομένων** • Από ένα σύνολο 100 μαθητών (60 αγόρια, 40 κορίτσια) επιλέγουμε ένα δείγμα 15 μαθητών (9 αγόρια και 6 κορίτσια). Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό; • Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα παρακάτω δείγματα; α. Κάποιος θέλει να σχηματίσει μια ιδέα για το αποτέλεσμα των επερχόμενων βουλευτικών εκλογών. Τηλεφωνεί λοιπόν σε συγγενείς και φίλους του και τους ρωτάει σχετικά. β. Για να δούμε πώς διασκεδάζουν οι νέοι της χώρας μας επιλέγουμε κάποιους μαθητές από διάφορα Λύκεια της Λευκωσίας. γ. Ο διευθυντής ενός Λυκείου αποφάσισε να καταγράψει τους λόγους της απουσίας των μαθητών από το Λύκειο κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής χρονιάς. Γι’ αυτό τον λόγο πήρε ως δείγμα όσους απουσίασαν το Νοέμβριο.	γ. Ποια είναι η μεταβλητή; δ. Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής ; *Απαντώ στην ερώτηση:* • *Τι δείχνουν οι αριθμοί που εμφανίζονται στο πρόβλημα;* **Μ.Π1 Κατανόηση μέσω προβλήματος** *Ερμηνεύω και κατανοώ το πρόβλημα. Συσχετίζω υφιστάμενες καταστάσεις με έννοιες που έχω ήδη διδαχθεί και τις διασυνδέσεων με μαθηματικές έννοιες.* **Παράδειγμα:** Ένας επιθεωρητής οχημάτων επισκέπτεται μια μεγάλη εταιρία με σκοπό τον έλεγχο των οχημάτων της. Η εταιρεία έχει 4 μεγάλα φορτηγά, 136 μικρά φορτηγά (βαν) και 21 οχήματα μικρού κυβισμού. Ο επιθεωρητής αποφασίζει να ελέγξει δείγμα 10% των οχημάτων. Όλα τα είδη των οχημάτων θα αντιπροσωπευθούν στο δείγμα. α. Πόσα αυτοκίνητα από κάθε είδος θα ελεγχθούν; β. Πώς κρίνετε τη δειγματοληπτική μέθοδο που ακολούθησε ο επιθεωρητής; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • *Ποιες πληροφορίες δίνονται στο πρόβλημα;* • *Περιγράφω τη σχέση ανάμεσα στον πληθυσμό και στο δείγμα.*

	• Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και η Ελένη θα διενεργήσουν μια έρευνα με σκοπό να βρουν τη δημοφιλέστερη ομάδα της πόλης τους ανάμεσα στους μαθητές του σχολείου τους. Ο Δημήτρης επιλέγει το δείγμα του μέσα στο λεωφορείο κατά τη διάρκεια της διαδρομής του προς το σχολείο. Η Ελένη επιλέγει το δείγμα της στην είσοδο του σχολείου, ρωτώντας κάθε $15ον$ μαθητή που μπαίνει στο σχολείο. Ο Γιώργος επιλέγει τυχαία 30 αριθμούς από το 1 μέχρι το 600 και μετά αντιστοιχεί τους αριθμούς με μαθητές του σχολείου του από αλφαβητικό ονομαστικό κατάλογο. Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου. **Παραδείγματα: Κρίση μεροληπτικών δεδομένων** • Ένα περιοδικό κάνει μια έρευνα και θέλει να εκτιμήσει πόσες φορές την εβδομάδα γυμνάζονται οι Κύπριοι. Για να υλοποιήσει την έρευνα του επέλεξε δείγμα από διάφορα γυμναστήρια της Λευκωσίας. Με το τέλος της έρευνας το περιοδικό ανακοίνωσε ότι οι Κύπριοι αθλούνται κατά μέσο όρο 3 φορές την εβδομάδα. Να αναφέρετε δύο λόγους για τους οποίους οι απαντήσεις μπορεί να είναι μεροληπτικές. • Μια έρευνα θέλει να διερευνήσει τις απόψεις των κατοίκων της Λευκωσίας για τη διαπλάτυνση ενός δρόμου. Για τον σκοπό αυτό, ένα ερωτηματολόγιο ταχυδρομήθηκε σε κάθε οικία στην πόλη και 97% των απαντήσεων ήταν εναντίον της διαπλάτυνσης του δρόμου. Να εξηγήστε γιατί	

	η έρευνα μπορεί να είναι μεροληπτική. • Σκοπός μιας έρευνας είναι να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο οι Κύπριοι περνούν τον ελεύθερο τους χρόνο. Ένα δείγμα 1000 ατόμων ερωτήθηκε τηλεφωνικά το Σάββατο απόγευμα. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η πλειοψηφία των ανθρώπων περνούν τον ελεύθερο τους χρόνο παρακολουθώντας τηλεόραση στο σπίτι. Να εξηγήσετε γιατί το δείγμα είναι μεροληπτικό.	